KATA PENGANTAR

M aha Besar Allah SWT yang telah berkenan memberikan kekuatan pada penyusun, sehingga mampu menyelesaikan buku ini. Ya, Allah, ampunilah dosa-dosa kami, lapangkanlah dada kami, sehatkanlah kami, dan berilah kami kekuatan sehingga kami mampu memperlihatkan kekuatan dan keindahan Al-Islam yang telah Engkau turunkan sejak Nabi Adam AS sampai Nabi Akhir Jaman, Muhammad SAW.

B uku ini disusun berdasarkan pengalaman mengajar di STT Telkom yang dimulai dari tahun 1993. Berisikan teori, contoh soal yang dikerjakan secara detil sehingga pembaca dapat memahami dengan lebih mudah, dan soal-soal yang dapat dikerjakan secara mandiri dan mempunyai rentang kesulitan yang cukup lebar, selain itu diberikan pula beberapa contoh penggunaan konsep dari Aljabar Linier Elementer ini. Harapan penyusun dengan adanya contoh-contoh sederhana penggunaan akan membuat buku ini terasa lebih "membumi".

D idasarkan atas buku yang menjadi pegangan matakuliah ini, yaitu: Aljabar Linier Elementer oleh Howard Anton, dan juga dengan judul yang sama oleh Wono Setiabudi. Selain itu, untuk memperkaya "kehijauan" buku ini, telah penyusun masukan pula beberapa bahan dari buku bacaan yang lain. Prasyarat membaca tulisan ini, antara lain: pemahaman yang cukup baik tentang sifat-sifat bilangan riil, mempunyai dasar matrik, polinom dan vektor.

B uku ini dapat digunakan sebagai buku pegangan matakuliah Aljabar Linier Elementer yang terdapat pada jurusan-jurusan matematika/ statistika maupun jurusan teknik, dan sosial yang menggunakan pendekatan kesisteman.

D i STT Telkom buku ini, dapat digunakan untuk mendukung pengajaran matakuliah: Aljabar Linier pada program S1 Jurusan Teknik Informatika dan Teknik Industri serta D3 Teknik Informatika, Aljabar Linier dan Kalkulus Vektor pada program S1 Teknik Informatika, Matematika Teknik pada program S1 Teknik Elektro, dan Matematika Lanjut pada program D3 Teknik Elektro.

S usunan penulisan, sebagai berikut:

1. Matrik, meliputi Definisi, Jenis Matrik, Operasi Matrik, dan Sifat-sifatnya.

2. Vektor di R^2 dan R^3, meliputi Operasi Vektor dan Sifat-sifatnya, Hasil Kali Titik, Hasil Kali Silang di R^3, dan Persamaan Garis dan Bidang di R^3.

3. Eliminasi Gauss yang digunakan untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier umum, Sistem Persamaan Linier homogen

4. Invers matrik dengan menggunakan matrik elementer, Pencarian solusi Sistem Persamaan Linier dengan matrik invers, Hasil lebih lanjut matrik invers terhadap Sistem Persamaan Linier

5. Determinan, meliputi determinan dengan ekspansi kofaktor, Sifat-sifat determinan terhadap Operasi Baris Elementer, Matrik Adjoin, Matrik Invers dengan Matrik Adjoin, Aturan Cramer

6. Ruang Vektor, meliputi Ruang n Euclides, Definisi Ruang Vektor, Sub Ruang, Bebas Linier, Membangun, Basis, dan Dimensi

7. Ruang Hasil Kali Dalam, meliputi Definisi, Panjang dan Sudut di Ruang Hasil Kali Dalam, Ortonormalisasi Basis

8. Nilai dan Vektor Eigen, meliputi Persamaan Karakteristik, Diagonalisasi, dan Diagonalisasi secara Ortogonal

9. Transformasi Linier, meliputi Definisi, Kernel, Rank, Koordinat sebagai bentuk Transformasi dari Ruang vektor sebarang ke R^n, Matrik Transformasi

A tas terselesaikannya tulisan ini, kami ucapkan dan do'a kan kepada:

1. Dini Handayani, istriku yang tercinta, yang selalu setia mendampingi diriku, baik dalam suka maupun duka, baik dalam keadaan sehat maupun sakit. Semoga kita disatukan Allah SWT kelak, menjadi pasangan yang abadi di dunia dan di dalam Jannah yang mengalir sungai-sungai dibawahnya. Amiin.

2. Fathiyyah Nur Azizah, Nashir Idzharul Huda, Ahshonat Izzatul Haq, Ilmi Diena Aliya, dan Ayyida Aini Rahmah, atas pengertiannya untuk tidak mengganggu Bapak. Semoga kalian mampu menemukan kebenaran yang sejati dan terus menjalaninya, walaupun berat ataupun ringan menjalani kebenaran itu. Teruslah berusaha dan berupaya. Walaupun seluruh isi dunia mencemoohmu, mencercamu, dan melawanmu. Jangan takut, karena Allah pasti menolong pencari kebenaran yang sejati. Tetap tegar, dan kuat. Amiin.

3. Teman-teman yang karena banyak hal tak mampu saya sebutkan di dalam forum ini, semoga Allah Yang Maha Kuasa, menolong kita dengan kekuasaan yang menolong menyelamatkan setiap diri kita untuk selamat dunia akhirat. Amiin.

4. Teman-teman di PPDU STT Telkom yang kadang penuh sindiran, penuh cemooh, penuh haru dan pilu, penuh intrik dan penuh tipu. Tak kan lari gunung dikejar. Maju terus pantang mundur.

5. Teman-teman di STT Telkom dari semua unit yang terus mendampingi dan terus bersama: Maju bersama. Semoga STT Telkom dapat menjadi tempat untuk menemukan kebenaran yang sejati. Amiin.

S emoga amal bakti beliau-beliau ini dapat diterima di sisi Allah SWT, sehingga menjadi syafa'at untuk mendapatkan kebenaran yang sejati, kebenaran yang mengantarkan setiap diri mampu mempertanggung jawabkan setiap perbuatannya dihadapan Sang Khaliq kelak di alam yang berbeda, yaitu Akhirat.

T ak ada gading yang tak retak, tak ada persoalan yang tak dapat diselesaikan, apakah oleh kita sendiri atau oleh orang lain, karena itu yang diperlukan adalah ketekunan dan kedisiplinan yang tinggi yang dituntut oleh diri kita masing-masing, sehingga kesuksesan dapat kita raih. Karena itu saran serta kritik yang membangun demi tercapainya Indonesia yang maju, yang berkeadilan, dapat tercapai dengan segera, sangat saya harapkan.Terima kasih ....

Bandung, Agustus 2002

Mahmud 'Imrona

DAFTAR ISI

Matrik 1
A. Definisi Matrik 1
B. Jenis Matrik 2
C. Operasi Matrik 4
D. Sifat-sifat Operasi Matrik 7

Vektor di Bidang dan di Ruang 13
A. Vektor 13
B. Hasil Kali Titik dan Proyeksi 16
C. Persamaan Garis dan Bidang diR^3 20

Eliminasi Gauss 25
A. Sistem Persamaan Linier 25
B. Eliminasi Gauss-Jordan 27
C. Sistem Persamaan Linier Homogen 34

Invers Matrik 38
A. Mencari A^{-1} menggunakan Matrik Elementer 38
B. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier menggunakan Invers Matrik 45

Determinan 49
A. Ekspansi Kofaktor 49
B. Sifat-sifat Determinan dan Reduksi Baris 52
C. Aturan Cramer 56

Ruang Vektor 64
A. Ruang n-Euclides 64
B. Ruang Vektor 67
C. Sub Ruang 72
D. Kombinasi Linier 74
E. Membangun dan Bebas Linier 79
F. Basis dan Dimensi 85
G. Ruang Baris dan Kolom Matrik 89

Ruang Hasil Kali Dalam 93
A. Ruang Hasil Kali Dalam 93
B. Panjang dan Sudut pada Ruang Hasil Kali Dalam 98
C. Ortonormalisasi 101

Nilai dan Vektor Eigen 108
A. Nilai dan Vektor Eigen 108
B. Diagonalisasi 113
C. Diagonalisasi Ortogonal 118

Transformasi Linier 122
A. Pengertian 122
B. Kernel dan Jangkauan 132
C. Koordinat 144
D. Matrik Transformasi Linier 151

MATRIK

A. Definisi Matrik

Definisi: Matrik adalah susunan bilangan atau fungsi yang diletakkan atas baris dan kolom serta diapit oleh dua kurung siku.
Bilangan atau fungsi tersebut disebut entri atau elemen matrik.
Lambang matrik dilambangkan dengan huruf besar, sedangkan entri (elemen) dilambangkan dengan huruf kecil.

Contoh:

A=$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2 & 0{,}23451 & 4 & 0 \\ \pi & {}^{3}\!/_{7} & 1032 & 80 & -13 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} x^2+1 & -2\ln x \\ \sin x & e^{3x+1} \end{bmatrix}$

Pada contoh matrik A elemen matrik berupa bilangan riil, sedangkan matrik B mempunyai elemen berupa fungsi satu peubah x.

Dalam matrik dikenal ukuran matrik yang disebut ordo, yaitu: banyak baris x banyak kolom (tanda x bukan menyatakan perkalian, tetapi hanya sebagai tanda pemisah).

Contoh:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$ matrik A berordo 2x3, dengan entri a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, dan a_{24}.

Secara umum sebuah matrik dapat ditulis:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ a_{m1} & a_{m2} & \Lambda & a_{mn} \end{bmatrix}$ atau

penulisan yang lebih singkat : $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ dengan *i*=1, 2, ..., n dan *j*=1, 2, ..., m.
Indek pertama (*i*) menyatakan baris ke-*i* dan indeks kedua (*j*) menyatakan kolom ke-*j*.

Dua matrik disebut **sama**, jika **ordonya sama** dan **entri yang seletak bernilai sama**, matrik A dan B sama ditulis A=B.

Contoh:
Jika matrik *A* seperti bentuk umum di atas dan $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ dengan *i*=1, 2, ..., n dan *j*=1, 2, ..., m, dan *A*=*B*, maka berlaku $a_{ij}=b_{ij}$

Jika A=$\begin{bmatrix} 2a & 3 \\ 1 & 4b \end{bmatrix}$ dan B=$\begin{bmatrix} -2 & 3c \\ c & 3+b \end{bmatrix}$, dan A=B, hanya dipenuhi oleh a = -1, b = 1, dan c = 1.

B. Jenis Matrik

Terdapat beberapa jenis matrik yang penting diantaranya:

1. Matrik Bujursangkar, yaitu matrik yang banyak baris=banyak kolom. Dalam matrik bujursangkar dikenal diagonal utama, yaitu entri-entri yang mempunyai nomor baris = nomor kolom.

   Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonal utama

   pada matrik di atas mempunyai ordo 3, dan ditulis A_3, sedangkan entri yang terletak pada diagonal utama adalah: a_{11}, a_{22}, dan a_{33}.

2. Matrik Segitiga Atas, yaitu matrik bujursangkar yang semua entri di bawah diagonal utama bernilai nol

   Contoh:

$$A=\begin{bmatrix} -5 & 2/7 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Matrik Segitiga Bawah, yaitu matrik bujursangkar yang semua entri di atas diagonal utama bernilai nol.

   Contoh:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & -7 & 5/9 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Matrik Diagonal, yaitu matrik bujursangkar yang semua entri di luar diagonal utama bernilai nol.

   Contoh:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 5/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Matrik Satuan, yaitu matrik diagonal yang entri pada diagonal utama bernilai satu, lambang: I_n, n menyatakan ordo matrik satuan.

   Contoh:

$$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ I_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

6. Matrik skalar, yaitu matrik diagonal yang semua entri pada diagonal utama bernilai sama, asalkan *tidak nol,* atau $c\neq 0$.

   Contoh:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

   Efek dari perkalian sebarang matrik dengan matrik skalar adalah seperti mengalikan matrik sebarang tersebut dengan skalar *c*.

7. Matrik Nol, yaitu matrik yang semua entrinya nol. Dengan lambang: O jika ordo dipentingkan ditulis O_{35} untuk menyatakan matrik nol dengan ordo 3x5.

   Contoh:

$$O_{23}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ O_{53}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

8. Matrik Invers, matrik bujursangkar A disebut mempunyai invers, jika terdapat matrik B, sehingga memenuhi BA=AB=I, lambang: invers matrik B biasanya dinyatakan oleh A^{-1}. Untuk matrik berordo 2x2, telah diberikan rumus pencariannya, yaitu:

$$A=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix},\ \text{maka } A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -c\\ -b & a\end{bmatrix}$$

   Untuk ordo yang lain, yaitu 3x3 dst, metode pencarian invers matrik akan dibicarakan pada bab selanjutnya.

9. Sebuah matrik bujur sangkar disebut Simetri, jika $A = A^T$.
   Contoh:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & 5 & 4\\ -2 & 4 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 7 & 5/8 & -1\\ 7 & 5 & 0 & 2\\ 5/8 & 0 & -3 & 12\\ -1 & 2 & 12 & 36\end{bmatrix}$$

Dari contoh di atas, terlihat bahwa entri-entri pada diagonal utama sebagai sumbu pencerminan, sedangkan entri pada baris ke-i kolom ke-j akan dicerminkan sehingga sama dengan entri pada kolom ke-i baris ke-j.

10. Sebuah matrik bujur sangkar disebut Skew-Simetri, jika A^T = -A.
Contoh:
Tentukan a, b, c, sehingga matrik A menjadi matrik skew-simetri, jika

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ a & 0 & 2\\ b & c & 0\end{bmatrix}.$$

Jawab:

$$A^T=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ 1 & 0 & c\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -a & 0 & -2\\ -b & -c & 0\end{bmatrix}= -A$$

Sehingga didapat persamaan-persamaan: a = -1, b = 0, c = -2, 1= -a, 0 = -b, 2 = -c, berarti: a = -1, b = 0, dan c = -2.

Jadi, matrik $A =\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$

C. Operasi Matrik

1. Penjumlahan matrik

Misalkan $A=\lfloor a_{ij}\rfloor,\ B=\lfloor b_{ij}\rfloor$ dengan i=1, 2, ..., n dan j=1, 2, ..., m

Jumlah matrik A dan B dinyatakan oleh $C = A + B$, yang memenuhi:

Syarat: ordo A = ordo B

Aturan: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ {entri yang seletak dijumlahkan}

Contoh:

$$A=\begin{bmatrix}-1/2 & 2 & -5\\ 7 & 4\,3/5 & 10\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3\,1/2 & -2 & 4\\ 3 & 1 & -7\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

Hitung: A+B dan B+C

Jawab:

$$A+B=\begin{bmatrix}-1/2 & 2 & -5\\ 7 & 4\,3/5 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\,1/2 & -2 & 4\\ 3 & 1 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2+3\,1/2 & 2+(-2) & -5+4\\ 7+3 & 4\,3/5+1 & 10+(-7)\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ 10 & 5\,3/5 & 3\end{bmatrix}$$

B+C = tidak terdefinisi, karena ordo B tidak sama dengan ordo C.

2. Perkalian dengan Skalar

Misalkan $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ dengan i=1, 2, ..., n dan j=1, 2, ..., m

Perkalian matrik A dengan skalar k dinyatakan oleh $C=kA$, yang memenuhi:

Syarat: *tidak ada*

Aturan: $c_{ij}=k\,a_{ij}$ {setiap entri pada matrik A dikalikan dengan skalar k}

Contoh:

$$-4\begin{bmatrix} 3\frac{1}{2} & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4).\frac{7}{2} & (-4).(-2) & (-4).4 \\ (-4).3 & (-4).1 & (-4).(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 8 & -16 \\ -12 & -4 & 28 \end{bmatrix}$$

Dengan definisi ini, didapat negatif matrik adalah: -A = (-1)A, yang berakibat pula operasi pengurangan dapat ditentukan, yaitu: A – B = A + (-B)

Contoh:

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -5 \\ 7 & 4\frac{3}{5} & 10 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 3\frac{1}{2} & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Hitung A – B.

Jawab:

A – B = A + (-B) = A + (-1)B =

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -5 \\ 7 & 4\frac{3}{5} & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3\frac{1}{2} & 2 & -4 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -9 \\ 4 & 3\frac{3}{5} & 17 \end{bmatrix}$$

3. Perkalian dua Matrik

Jika $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ dengan i=1, 2, ..., n dan j=1, 2, ..., m dan $B = \lfloor b_{jk} \rfloor$ dengan k=1, 2, ..., p

perkalian matrik A dan B yang dinyatakan oleh, $C=AB$ memenuhi:

Syarat: banyak kolom A = banyak baris B

Aturan: $c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$ {jumlah dari semua perkalian antara elemen A pada baris ke-i dengan elemen B pada kolom ke-k}

Dengan aturan ini, dikaitkan dengan vektor kolom dan vektor baris, jika $\mathbf{a}_i$ vektor baris ke-*i* dari matrik A dan $\mathbf{b}_k$ vektor kolom ke-*k* dari matrik B, maka elemen-elemen matrik C adalah: $c_{ik} = \mathbf{a}_i\mathbf{b}_k$

Contoh:

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

Hitung:

a. entri AB pada baris ke-1 kolom ke-2,
b. entri AB pada baris ke-2 kolom ke-3,
c. entri AB pada baris ke-1 kolom ke-3
d. entri AB pada baris ke-2 kolom ke-1
e. AB

Jawab:

a. entri AB pada baris ke-1 kolom ke-2 = $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$ = -9 + 4 – 24 = -29

b. entri AB pada baris ke-2 kolom ke-3 = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ = 4 – 1 – 35 = -32

c. entri AB pada baris ke-1 kolom ke-3 = $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ = -6 + 1 + 28 = 23

d. entri AB pada baris ke-2 kolom ke-1 = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ = 0 – 1 + 10 = 9

e. AB = $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -29 & 23 \\ 9 & 32 & -32 \end{bmatrix}$

4. Transpos matrik

Misalkan $A = \left[a_{ij}\right]$ dengan i=1, 2, ..., n dan j=1, 2, ..., m.

Transpos matrik A, yang dinyatakan oleh B=A^T, didefinisikan sebagai:

Syarat: *tidak ada*

Aturan: b_{ji}=a_{ji} {kolom matrik A menjadi baris matrik A^T}

Contoh:

Tentukan A^T, jika A = $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

Jawab:

$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

5. Trase matrik

Misalkan $A = \left[a_{ij}\right]$ dengan i=1, 2, ..., n dan j=1, 2, ..., n.

Trase dari matrik A yang dinyatakan oleh trase(A), didefinisikan sebagai:

Syarat: *matrik bujursangkar*

Aturan: trase(A)=$a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ {penjumlahan semua entri diagonal utama}

Contoh:

A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Hitung trase(A).

Jawab:

Trase(A) = 2 – 2 + 1 = 1

Contoh Tambahan:

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{3} & -5 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

a. $A + B$ tidak terdefinisi karena ordo A dan ordo B tidak sama
b. AB tidak terdefinisi karena banyak kolom A tidak sama dengan banyak baris B
c. $A + E = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+0 \\ -3+0 & 0+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$
d. $AC = \begin{bmatrix} 1.4+2.(-3) & 1.\frac{1}{3}+2.0 & 1.(-5)+2.1 \\ (-3).4+0.(-3) & (-3).\frac{1}{3}+0.0 & (-3).(-5)+0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{3} & -3 \\ -12 & -1 & 15 \end{bmatrix}$
e. $BC + 3D = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{6} & \frac{-5}{2} \\ 6 & 0 & -2 \\ -13 & \frac{-1}{3} & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -6 & 3 \\ -3 & 9 & 12 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 3 & 9 & 10 \\ -11\frac{1}{2} & \frac{-1}{3} & 11 \end{bmatrix}$
f. *trase(A)*= 1 + 0 = 1
g. *trase(B)* tidak ada, karena B bukan matrik bujursangkar
h. $3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$
i. $3IA = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$
j. *trase(D)*=0 + 3 + 1= 4

D. Sifat-sifat Matrik

1. Terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar
   Pada sifat berikut, ordo matrik dianggap telah sesuai, sehingga operasi dapat dilakukan:

a.	$A+B=B+A$	{sifat komutatif}
b.	$(A+B)+C=A+(B+C)$	{sifat asosiatif}
c.	$A+O=O+A=A$	{sifat matrik nol, identitas penjumlahan}
d.	$A+(-A)= -A+A=O$	{sifat negatif matrik}
e.	$k(A+B)=kA+kB$	{sifat distributif terhadap skalar k}
f.	$(k+l)A=kA+lA$	{sifat distributif terhadap skalar k dan l}
g.	$(kl)A=k(lA)$	{sifat asosiatif terhadap perkalian skalar}
h.	$1A=A$	{sifat perkalian dengan skalar 1 (satu)}
i.	$(A+B)^T = A^T + B^T$	{sifat transpos matrik terhadap penjumlahan}

2. Terhadap operasi perkalian, penjumlahan, dan perkalian dengan skalar

Pada sifat berikut, ordo matrik dianggap telah sesuai, sehingga operasi dapat dilakukan:

a. Pada umumnya berlaku sifat AB≠BA {tidak bersifat komutatif}
Contoh:
$$AB=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -5\\ 6 & -6\end{bmatrix}$$
$$BA=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 11\\ -2 & -2\end{bmatrix}$$
Sehingga: AB≠BA
Akibatnya tidak berlaku hukum pencoretan, sebagaimana dalam perkalian bilangan riil: jika AB=CB, belum tentu: A=C.

b. (AB)C=A(BC) {sifat asosiatif}

c. AI=IA=A {sifat matrik satuan, identitas perkalian}

d. AO=OA=O {sifat matrik nol}

e. $$A^n=\begin{cases} I, & \text{jika n} = 0\\ \underbrace{AA\ldots A}_{\text{sebanyak n kali}}, & \text{jika n} = 1,2,\ldots\end{cases}$$

f. $A^rA^s=A^{r+s}$, jika r dan s bilangan asli.

g. Matrik diagonal $D=\begin{bmatrix}d_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_n\end{bmatrix}$, berlaku $D^k=\begin{bmatrix}{d_1}^k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & {d_2}^k & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & {d_n}^k\end{bmatrix}$

h. Jika AB=O, **tidak** dijamin berlaku: A=O atau B=O atau BA=O.
Contoh:
Jika $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & -4\end{bmatrix}$, maka $AB=O$ dan $BA\neq O$

i. (kA)B=k(AB)=A(kB)

j. (A+B)C=AC+BC

k. C(A+B)=CA+CB

l. $(AB)^T = B^TA^T$ {urutan operasi dibalik}

m. $(kA)^T=kA^T$

3. Terhadap operasi penjumlahan, perkalian dengan skalar, dan trase
   a. trase(A+B) = trase(A) + trase(B)
   b. trase(A^T) = trase(A)
   c. trase(kA) = k trase(A)
   d. trase(I_{nxn}) = n

Contoh:

Jika A = $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, dan B = $\begin{bmatrix}4 & 1\\ 7 & -2\end{bmatrix}$.

a. $(A+B)^T=\left(\begin{bmatrix}6 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}\right)^T=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

b. $A^T + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $(AB)^T = (\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 25 & -5 \end{bmatrix})^T = \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

d. $A^TB^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ -1 & -13 \end{bmatrix}$

e. $B^TA^T = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

f. $(½B)^T = (\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -1 \end{bmatrix})^T = \begin{bmatrix} 2 & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

g. $½\, B^T = ½ \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

h. $-2\,A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

i. $-2IA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

j. $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

k. $A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -18 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$

l. trase(A) = 2 + 3 = 5

m. trase(B) = 4 + (-2) = 2

n. trase(A+B) = trase($\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$) = 6 + 1 = 7

Contoh khas:

Pada kehidupan sehari-hari konsep matrik digunakan untuk menyatakan hal-hal yang bersifat kompleks, pada contoh di bawah ini akan diberikan penggunaan matrik untuk perusahaan yang berskala besar, namun dengan penyederhanaan.

Sebuah perusahaan multinasional PT. Makmur Kaya yang bergerak di bidang penjualan pakaian olah raga mempunyai beberapa outlet di beberapa kota, tabel berikut menyatakan inventori dari setiap outlet pada tahun 2001:

Outlet	Jenis Pakaian		
	Sepatu	Celana	Kaos
Bandung	60	115	150
Jakarta	90	75	45
Surabaya	50	80	250
Semarang	85	70	450

Sedangkan tabel di bawah ini menyatakan harga setiap jenis pakaian:

Jenis	Harga dalam rupiah
Sepatu	250000
Celana	175000
Kaos	85500

Kedua tabel di atas dapat dinyatakan dalam bentuk matrik di bawah ini:
Matrik inventori:

$$\text{Inventori} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Sepatu} & \text{Celana} & \text{Kaos} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 60 & 115 & 150 \\ 90 & 75 & 45 \\ 50 & 80 & 250 \\ 85 & 70 & 450 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Bandung} \\ \text{Jakarta} \\ \text{Surabaya} \\ \text{Semarang} \end{array}$$

Sedangkan matrik Harga:

$$\text{Harga} = \begin{bmatrix} 250000 \\ 175000 \\ 85500 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{sepatu} \\ \text{celana} \\ \text{kaos} \end{array}$$

Sehingga dapat diketahui matrik total nilai inventori, yaitu Inventori x Harga:

$$\text{Nilai Inventori} = \begin{bmatrix} 60 & 115 & 150 \\ 90 & 75 & 45 \\ 50 & 80 & 250 \\ 85 & 70 & 450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 250000 \\ 175000 \\ 85500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47950000 \\ 39472500 \\ 47875000 \\ 71975000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Bandung} \\ \text{Jakarta} \\ \text{Surabaya} \\ \text{Semarang} \end{array}$$

Jika selama tahun 2001, pada setiap outlet berhasil melakukan penjualan seperti yang dinyatakan pada tabel di bawah ini:

Outlet	Jenis Pakaian		
	Sepatu	Celana	Kaos
Bandung	55	105	145
Jakarta	87	64	28
Surabaya	47	78	243
Semarang	79	50	425

Maka sisa barang pada setiap outlet pada akhir tahun 2001 adalah:

$$\text{Inventori – Barang Terjual} = \begin{bmatrix} 60 & 115 & 150 \\ 90 & 75 & 45 \\ 50 & 80 & 250 \\ 85 & 70 & 450 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 55 & 105 & 145 \\ 87 & 64 & 28 \\ 47 & 78 & 243 \\ 79 & 50 & 425 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 3 & 11 & 17 \\ 3 & 2 & 7 \\ 6 & 20 & 25 \end{bmatrix}$$

Pendapatan kotor setiap outlet pada tahun 2001 adalah:

$$\begin{bmatrix} 55 & 105 & 145 \\ 87 & 64 & 28 \\ 47 & 78 & 243 \\ 79 & 50 & 425 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 250000 \\ 175000 \\ 85500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44522500 \\ 35344000 \\ 35344000 \\ 64837500 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{Bandung} \\ \text{Jakarta} \\ \text{Surabaya} \\ \text{Semarang} \end{array}$$

Sedangkan biaya yang harus ditanggung atas barang sisa adalah:

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 3 & 11 & 17 \\ 3 & 2 & 7 \\ 6 & 20 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 250000 \\ 175000 \\ 85500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3427500 \\ 4128500 \\ 1698500 \\ 7137500 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{Bandung} \\ \text{Jakarta} \\ \text{Surabaya} \\ \text{Semarang} \end{array}$$

Latihan:

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{3} & -5 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

   $E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

   Hitunglah: a. BA b. E^2 c. E^3 d. E^{10} e. $A^2 + 2A + I$ f. $(A+I)^2$ g. $(BC - D)^T$
   h. $C^TB^T - D^T$ i. 3C(BA) j. C(3B)A k. (CB)(3A) l. trase(A + E)
2. Tunjukkan bahwa Sistem Persamaan Linier : $\left.\begin{matrix} 2x & - & 3y & = & 1 \\ x & + & 4y & = & 2 \end{matrix}\right\}$ dapat dinyatakan sebagai persamaan AX=B [petunjuk: tentukan matrik A, X dan B]
3. Jika matrik A, X, dan B hasil dari no. 2 tentukan invers A atau A^{-1} dan tentukan solusi persamaan AX=B, dengan mengingat sifat $I = AA^{-1}$.
4. Diberikan: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$, dan $C=AB$. Jika $\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} \end{bmatrix}$ yang disebut vektor baris ke-*i* dari matrik *A* atau dengan istilah lain sub matrik *A* baris ke-*i*, dan $\mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \end{bmatrix}$ yang disebut vektor kolom ke-*j* dari matrik *B* atau dengan istilah lain sub matrik *B* kolom ke-*j*. Tunjukkan bahwa berlaku $c_{ij} = \mathbf{a}_i\mathbf{b}_j$.
5. Buktikan trase(A + B) = trase(A) + trase(B).
6. Tentukan syarat, sehingga berlaku $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, jika A dan B berordo 2x2.
7. Jika A dan B berordo 2x2, tentukan syarat-syarat agar berlaku:
   $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.
8. Untuk matrik berordo 2x2, tunjukkan sifat $(AB)^T = B^TA^T$.
9. Tentukan persamaan-persamaan dalam variabel-variabel x, y, dan z, sehingga persamaan memenuhi persamaan matrik berikut:
   $\begin{bmatrix} x+y & 3x+y \\ x+z & x+y-2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 9 & -17 \end{bmatrix}$

10. Tentukan persamaan-persamaan dalam variabel-variabel x, y, z, dan w, yang terbentuk, sehingga berlaku persamaan matrik di bawah ini:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 6 & 8 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2x \\ y & -y+z \\ x+w & w-2y+x \\ z & z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 45 & 46 \\ 3 & 87 \end{bmatrix}$$

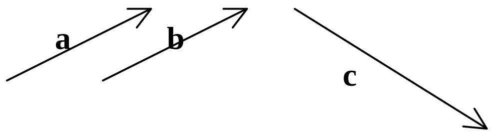
11. Tunjukkan bahwa, jika A matrik skew-simetri, maka trace(A)=0
12. Buktikan jika D matrik diagonal, maka D^k adalah matrik diagonal yang entri-entrinya adalah entri pada diagonal utama D dipangkatkan k.
13. Tunjukkan bahwa jika A matrik bujursangkar, maka matrik S = ½ (A + A^T) adalah matrik simetri.
14. Tunjukkan bahwa jika A matrik bujursangkar, maka matrik R = ½ (A - A^T) adalah matrik skew-simetri.
15. Dari kedua matrik pada soal no. 14 dan 15, tunjukkan berlaku hubungan A = S + R.
16. Jika A matrik bujursangkar 2x2, tunjukkan bahwa AA^T berbentuk matrik simetri.

VEKTOR DI BIDANG DAN RUANG

A. Vektor

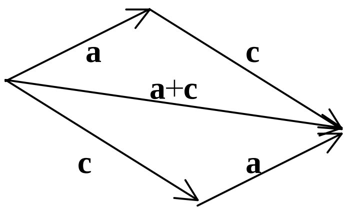
Vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah. Vektor memainkan peranan yang sangat penting dalam menggambarkan kelakuan dari fenomena alam ini.

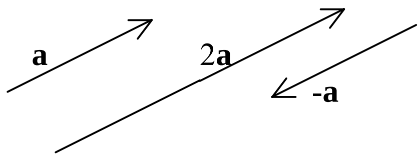
Vektor digambarkan oleh ruas garis yang dilengkapi dengan anak panah. Panjang ruas garis sebagai perwakilan dari besar vektor, sedangkan anak panah menunjukkan arah dari vektor. Sebuah vektor dimulai dari titik awal (*initial point*) dan diakhiri oleh titik akhir (*terminal point*).



Pada gambar di atas, vektor **a** dan **b** sama, walaupun letaknya berbeda, dikarenakan panjang ruas garis dan arah vektor **a** dan **b** sama. Sedangkan vektor **c**, dikarenakan panjang ruas garisnya berbeda, maka vektor **a** ≠**c**, apalagi arah dari vektor **c** juga berbeda. Vektor dilambangkan oleh huruf kecil tebal atau huruf kecil dengan panah di atasnya, sehingga vektor a dapat ditulis sebagai **a**, atau $\vec{a}$.

Dalam konsep vektor dikenal pula **vektor nol**, yaitu vektor yang panjangnya nol, dengan arah sebarang yang menyesuaikan dengan operasi yang mengikutinya. Secara geometri vektor nol dapat digambarkan sebagai sebuah titik.

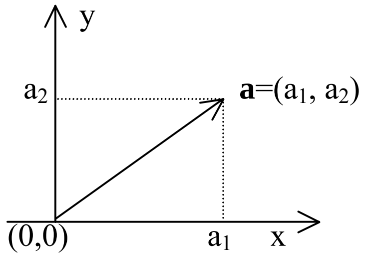


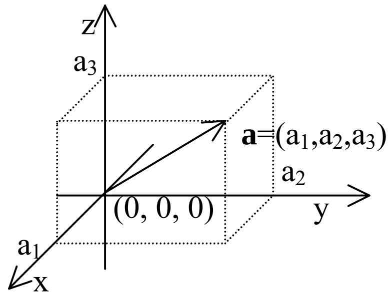


Penjumlahan **a** dan **c**, dilakukan dengan cara sebagai berikut: geserlah letak **c**, sehingga titik awal **c** berhimpit dengan titik akhir **a**, maka **a**+**c** adalah vektor yang titik awalnya titik awal **a** dan titik akhirnya titik akhir **c**. Tentunya dengan cara yang serupa kita dapat menggeser **a** sehingga titik awal **a** berhimpit dengan titik akhir **c**, dan **c**+**a** adalah vektor yang titik awalnya titik awal **c** dan titik akhirnya titik akhir **a**. Metode ini disebut **metode jajaran genjang**.

Sedangkan operasi perkalian dengan skalar dinyatakan, untuk kasus k **a**, berarti panjang ruas garis k**a** adalah sepanjang $|k|$ (*nilai mutlak dari k*) dikali panjang **a**, sedangkan arahnya, jika k positif sama dengan arah **a**, sedangkan jika k negatif berlawanan arah dengan **a**. Jika $|k| < 1$ disebut **pemampatan** (*panjang* k**a** *lebih pendek dibanding panjang* **a**), dan jika $|k| > 1$ disebut **perenggangan** (*panjang* k**a** *lebih panjang dibanding panjang* **a**). Akibat dari operasi ini, maka dapat didefinisikan operasi pengurangan vektor, yaitu:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}$$





Secara analitis, sebuah vektor di bidang dapat dinyatakan sebagai pasangan bilangan terurut, misalkan **a**=(a_1, a_2) yang digambarkan di dalam koordinat 2 sumbu yang saling tegak lurus. Sedangkan vektor di ruang (∇^3) dapat digambarkan menggunakan koordinat 3 sumbu yang saling tegak lurus, yang mengikuti aturan tangan kanan, dan secara analitis dinyatakan sebagai tiga bilangan terurut, **a**=(a_1, a_2, a_3). Vektor yang titik awalnya di titik asal *{(0,0) untuk vektor di bidang dan (0, 0, 0) untuk vektor di ruang}* disebut **vektor posisi**.

Untuk **a**=(a_1, a_2) dan **b**=(b_1,b_2), berlaku:
1. **a**=**b**, berarti a_1=b_1 dan a_2=b_2
2. **a**+**b**=(a_1+b_1, a_2+b_2) (*entri yang seletak dijumlahkan*)
3. k**a**=(ka_1, ka_2) (*setiap entri dikalikan dengan k*)
4. **a** - **b**=**a**+(-**b**)=**a**+(-1)**b**=(a_1-b_1, a_2-b_2)

Untuk **a**=(a_1, a_2, a_3) dan **b**=(b_1, b_2, b_3), berlaku:
1. **a**=**b**, berarti a_1=b_1, a_2=b_2 dan a_3=b_3
2. **a**+**b**=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) (*entri yang seletak dijumlahkan*)
3. k**a**=(ka_1, ka_2, ka_3) (*setiap entri dikalikan dengan k*)
4. **a** - **b**=**a**+(-**b**)=**a**+(-1)**b**=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)

Contoh:
Jika **a**=(2, 3, -1), **b**=(0, -2, 4), dan **c**=(1, -1, 1), tentukan:
a. **a**+**b**
b. –5**c**
c. 2**a**+3**b**
d. –**a**+2**b**+3**c**
e. **a** – **b**

Jawab:
a. **a**+**b**=(3, 2, 0)
b. –5**c**=(-5, 5, -5)
c. 2**a**+3**b**=(4, 6, -2)+(0, -6, 12)=(4, 0, 10)
d. –**a**+2**b**+3**c**=(-2, -3, 1)+(0, -4, 8)+(3, -3, 3)=(-2, -7, 9)+(3, -3, 3)=(1, -10, 12)
e. **a** – **b**=(2, 5, -5)

Sifat Vektor R^2 dan R^3 terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar:
Jika **u**, **v**, **w**$\in R^2$ atau R^3 dan *k*, *l* skalar (bilangan riil), berlaku:
1. **u** + **v** = **v** + **u** (*sifat komutatif*)

2. (**u** + **v**) + **w** = **v** + (**u** + **w**) (*sifat asosiatif*)
3. **o** + **u** = **u** + **o** = **u** (*identitas penjumlahan*)
4. –**u** + **u** = **u** + (-**u**) = **o** (*invers penjumlahan*)
5. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
6. $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$
7. $(kl)\mathbf{u}=k(l\mathbf{u})$
8. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Jika diperhatikan dengan seksama, sebuah vektor dapat ditulis sebagai sebuah matrik dengan satu kolom, yaitu:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} =(a_1, a_2) \text{ dan } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} =(u_1, u_2, u_3)$$

Selain vektor posisi yang selalu berawal dari titik asal, terdapat pula vektor yang titik awalnya $P_1=(x_1, y_1, z_1)$, dan titik akhirnya di $P_2=(x_2, y_2, z_2)$, vektor yang demikian dinyatakan sebagai:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Dengan cara serupa didapat pula untuk kasus di R^2, yaitu:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Panjang vektor $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$ disebut **norm**, dengan menggunakan phitagoras, didapat:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Begitupun untuk kasus vektor yang titik awalnya P_1 dan titik akhirnya P_2, norm vektor ini:

$$d(P_1, P_2)=\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

yang dikenal pula sebagai jarak antara titik P_1 dan P_2.

Contoh:
Jika **a**=(2, 3, -1), **b**=(0, -2, 4), dan **c**=(1, -1, 1), tentukan:
a. 7**a**+**b**7
b. 7–5**c**7
c. 27**a**+3**b**7

Jawab:
a. 7**a**+**b**7=7(2, 1, 3)7=$\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$
b. 7–5**c**7=7(-5, 5, -5)7=$\sqrt{(-5)^2 + 5^2 + (-5)^2} = \sqrt{75}$
c. 27**a**+3**b**7=27(2, -3, 11)7=2$\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 11^2} = 2\sqrt{134}$

Latihan:
1. Jika **a**=(3, 4), **b**=(-1, 2), dan **c**=(3, 4), hitunglah
   a. 3**a** – 2**b**
   b. 4(2**a** + 3**b**)

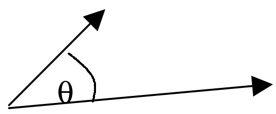
c. $-\mathbf{a} + 2\mathbf{c} + \mathbf{b}$
d. $2\mathbf{a} - (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

2. Jika **a**=(2, 3, -2), **b**=(1/2, -4, 5), **c**=(25, -32, 2)
a. $\mathbf{a} - \mathbf{b}$
b. $2(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathbf{c}$
c. $2\mathbf{b} - (\mathbf{a} + 3\mathbf{c})$
d. $-3\mathbf{a} + (\mathbf{c} - \mathbf{a})$

3. Jika **a**=(2k^2, -4, 5), **b**=(1/2, -4, 5), dan **a**=**b**, tentukan k.
4. Jika **u**=(1, 2, 3), **v**=(2, -3, 1), dan **w**=(3, 2, -1), tentukan vektor **x** yang memenuhi 2**u**–**v**+**x** =7**x**+**w**
5. Jika **u**, **v**, dan **w** seperti no. 4, tentukan skalar-skalar x_1, x_2, dan x_3, sehingga dipenuhi persamaan vektor: $x_1\mathbf{u}+x_2\mathbf{v}+x_3\mathbf{w}=(6, 14, -2)$
6. Hitung jarak antara $P_1(3, 2, 4)$ dan $P_2(-1, 3, -2)$.
7. Jika **a**, **b**, dan **c** vektor-vektor pada soal no. 2, hitunglah:
   a. 7**a**+**b**7
   b. 72**a** 7 + 7-3**b**+2**c** 7
   c. -27**a**7 + 74**c**7
   d. 72**a** – **b** + 4**c**7
8. Hitung norm dari $\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$, proses ini disebut normalisasi
9. Tentukan semua skalar k sehingga 7k**v**7=3, jika **v**=(-1, 1, 5)
10. Tentukan vektor yang berlawanan arah dengan **v**=(1, 2, -2), yang normnya: 1.

B. Hasil Kali Titik dan Proyeksi

Sudut yang dibentuk oleh dua vektor yang saling bertemu pada satu titik adalah sudut yang terkecil.



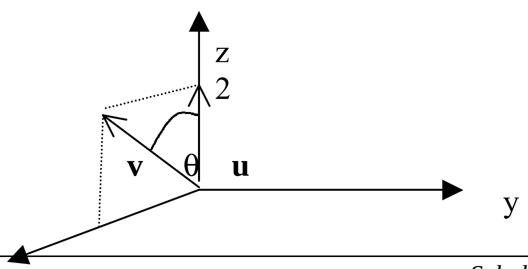
Definisi: Jika **u** dan **v** vektor di bidang atau di ruang, hasil kali titik antara **u** dan **v** didefinisikan:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \begin{cases} \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta & \text{, jika } \mathbf{u} \neq \mathbf{o} \text{ dan } \mathbf{v} \neq \mathbf{o} \\ 0 & \text{, jika } \mathbf{u} = \mathbf{o} \text{ atau } \mathbf{v} = \mathbf{o} \end{cases}$$

dimana θ sudut antara **u** dan **v**.

Contoh:
Tentukan hasil kali titik antara vektor **u**=(0, 0, 2) dengan **v**=(2, 0, 2).

Jawab:

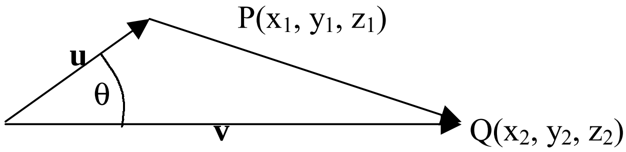


x 2

Sudut antara vektor **u** dan **v** sebesar π/4, sehingga **u•v**=7**u**77**v**7cos θ

$$=\sqrt{0^2+0^2+2^2}\sqrt{2^2+0^2+2^2}\cos\frac{\pi}{4}=4.$$

Untuk mendapatkan bentuk lain hasil kali titik yang lebih mudah perhitungannya, perhatikan gambar berikut ini:



Dengan menggunakan aturan cosinus, didapat:

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

$$\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta=\frac{1}{2}\left(\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2\right)$$

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=\frac{1}{2}\left(\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2\right)$$

Dengan melakukan subtitusi:

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,\ \|\mathbf{u}\|^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2,\ \|\mathbf{v}\|^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2$$

Kedalam persamaan di atas, didapat bentuk lain hasil kali titik:

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

Untuk kasus di R^2 dengan cara yang serupa didapat aturan, sebagai berikut:

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=x_1x_2+y_1y_2$$

Contoh:
Tentukan hasil kali titik dari **u**=(2, -3, 7) dan **v**=(-4, 1, 2).

Jawab:
u(**v**=2.(-4)+(-3).1+7.2=3

Dengan didapatkannya bentuk lain hasi kali titik, maka sudut antara dua vektor dapat dengan mudah dihitung:

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|},\text{ jika }\mathbf{u}\neq\mathbf{o}\text{ dan }\mathbf{v}\neq\mathbf{o}$$

Contoh:
Tentukan cosinus sudut antara **u**=(2, -3, 7) dan **v**=(-4, 1, 2).

Jawab:

$$\|\mathbf{u}\|=\sqrt{2^2+(-3)^2+7^2}=\sqrt{62},\ \|\mathbf{v}\|=\sqrt{(-4)^2+1^2+2^2}=\sqrt{21}$$

$$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{62}\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{1302}}{434}$$

Hasil lain yang bisa didapat, adalah:

1. Dikarenakan sudut antara **a** dan **a** adalah 0, maka norm/ panjang suatu vektor dapat dinyatakan, sebagai berikut:

   7**a**7=(**a**•**a**) $^{1/2}$

2. Jika **u** dan **v** keduanya bukan vektor **o**, dan θ sudut antara **u** dan **v**, maka dari nilai hasil kali titik dapat ditentukan kondisi sudut antara dua vektor tersebut:
   a. θ lancip, jika **u**•**v** > 0
   b. θ tumpul, jika **u**•**v** < 0
   c. θ=π/2, jika **u**•**v** = 0 (**u** *dan* **v** *tegak lurus/ ortogonal*)

Contoh:
Jika **u**=(2, -3, 7), dan **v** = (k^2, -1, k).
a. Hitunglah 7**u**7.
b. Tentukan k, sehingga **u** dan **v** tegak lurus.

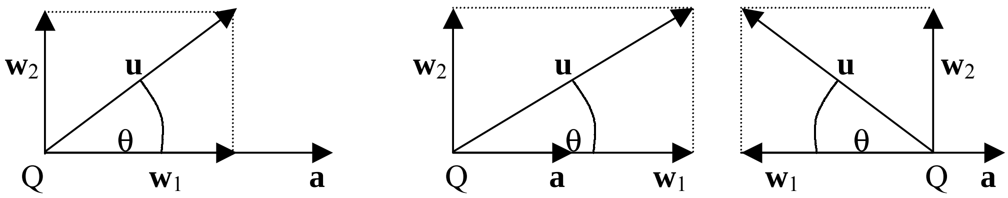
Jawab:
a. 7**u**7=(**u**•**u**) $^{1/2}$ = (2.2+(-3)(-3)+7.7) $^{1/2}$ = (62) $^{1/2}$
b. **u**•**v** = $2k^2 + 7k + 3 = 0$, berarti k=1/2 atau k=3

Sifat-sifat Hasil Kali Titik:
Jika **u**, **v**, dan **w** vektor di R^2 atau R^3, *k* skalar, berlaku:
1. **u**•**v** = **v**•**u** (*komutatif*)
2. **u**• (**v** + **w**)=**u**•**v** + **u**•**w** (*distributif*)
3. *k*(**u**•**v**)=(*k***u**)•**v** = **u**•(*k***v**)
4. **u**•**u** >0, jika **u**≠**o**, dan **u**•**u**=0, jika **u**=**o**

Contoh:
Jika **u**=(2, -3, 7), **v**=(-4, 1, 2), dan **w**=(0, 3, -2), hitunglah:
a. **u**•(**v**+**w**)
b. **u**•**v**+ **u**•**w**
c. –2(**u**•**v**)
d. **u**•(–2**v**)
e. **u**•**u**

Jawab:
a. **u**•(**v**+**w**)=**u**•(-4, 4, 0)=-20
b. **u**•**v**+ **u**•**w**=(2(-4)+(-3)1+7.2)+(2.0+(-3)3+7(-2))=-20
c. –2(**u**•**v**)=-2(3)=-6
d. **u**•(–2**v**)=(2, -3, 7) •(8, -2, -4)=2.8+(-3)(-2)+7(-4)=-6
e. **u**•**u**=2.2+(-3)(-3)+7.7=62

Seringkali dibutuhkan penguraian satu vektor **u** menjadi jumlah dua vektor, dengan ketentuan satu vektor sejajar dengan vektor **a**≠o, sedangkan vektor yang lain tegak lurus dengan vektor **a**. Perhatikan gambar di bawah ini:



Terlihat $\mathbf{w}_1$ sejajar dengan **a**, sedangkan $\mathbf{w}_2$ tegak lurus terhadap **a**, dan dipenuhilah hubungan:

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_1) = \mathbf{u}$$

Vektor $\mathbf{w}_1$ disebut proyeksi ortogonal (tegak lurus) **u** pada **a**, dan dilambangkan sebagai:

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$$

Sedangkan vektor $\mathbf{w}_2$ disebut komponen vektor **u** yang ortogonal (tegak lurus) terhadap **a**, yang ditentukan sebagai berikut: $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = \mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$.

Karena $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$ tegak lurus pada **a**, maka:

$$\|\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|\left|\cos\theta\right| = \|\mathbf{u}\|\left|\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{a}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{a}\|}\right| = \frac{|\mathbf{u}\bullet\mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|}$$

Karena vektor ini berada (sejajar) dengan vektor **a**, maka norm ini dikalikan dengan vektor satuan **a**, yaitu: $\dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$:

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{a}}{\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}}\mathbf{a}$$

Contoh:

Jika **u**=(2, -3, 7), dan **v**=(-4, 1, 2) tentukan: $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ dan komponen **u** yang tegak lurus **v**.

Jawab:

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{3}{21}(-4,\ 1,\ 2) = \tfrac{1}{7}(-4,\ 1,\ 2) = \left(-\tfrac{4}{7},\ \tfrac{1}{7},\ \tfrac{2}{7}\right)$$

Sedangkan komponen **u** yang tegak lurus **v** adalah: (2, -3,7) – (-4/7, 1/7, 2/7) = (18/7, -22/7, 47/7)

Latihan:

1. Tentukan cosinus sudut antara vektor **u** dan **v**, berikut:
   a. **u**=(1, 0, 1) dan **v**=(-1, 1, -1)
   b. **u**=(1, 2, 3) dan **v**=(-1, 2, 1)
   c. **u**=(3, 1, 0) dan **v**=(0, 1, -1)
2. Tentukan k, sehingga vektor **u**=(k, 0, 1) dan **v**=(-k, 1, 1) saling tegak lurus.
3. Berdasarkan jawaban dari soal no. 2, pilih nilai k yang terkecil, hitunglah $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.
4. Tanpa menghitung cosinus sudut antara **u**=(1, 2, 1) dan **v**=(-1, 1, -3), tentukan apakah sudutnya tumpul, lancip ataukah $\pi/2$?
5. Berapakah norm dari $\text{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, jika **u**=(1, 2, 1) dan **v**=(-2, 1, 2).
6. Tentukan $\text{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, jika **u**=(2, 0, -1) dan **v**=(-1, 2, 1).
7. Tentukan komponen **v** yang ortogonal pada **u**, jika **u**=(1, 2, 1) dan **v**=(-2, 1, 2).
8. Tentukan jarak antara titik (1, -2) dengan garis 3x + 4y + 7 = 0.
9. Jika $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = \mathbf{a}\bullet\mathbf{c}$, jika $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$, apakah **b**=**c**? Jelaskan! (catatan: **a**, **b**, $\mathbf{c} \in R^2$ atau R^3)

10. Carilah dua vektor yang norm-nya 1 dan ortogonal pada (1, -2)
11. Misalkan **a**=(k, 2) dan **b**=(2, 1), tentukan k, sehingga sudutnya $\pi/6$
12. Tentukan cosinus sudut antara garis –x + y + 3 = 0 dan 2x – y + 4 = 0. (Petunjuk: tentukan vektor-vektor yang tegak lurus dengan masing-masing garis tersebut, kemudian hitung cosinus sudutnya)
13. Tunjukkan bahwa berlaku **a•a** = 7**a**7^2, untuk **a**$\in R^2$ atau R^3
14. Apakah ada artinya ekspresi **a•**(**b•c**)? Jelaskan.

C. Persamaan Garis dan Bidang di R^3

Di bidang (R^3), seringkali diminta sebuah vektor yang tegak lurus pada dua buah vektor yang lain. Untuk itu didefinisikanlah hasil kali silang, berikut ini:

Definisi: Misalkan **u**=(u_1, u_2, u_3), dan **v**=(v_1, v_2, v_3). Hasil kali silang antara **u** dan **v** adalah:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

dimana $\hat{i} = (1,0,0),\ \hat{j} = (0,1,0),\ \hat{k} = (0,0,1)$ merupakan vektor-vektor satuan di R^3.

Contoh:
Jika **u**=(2, 3, -1) dan **v**=(-4, 2, 8), tentukan **u** x **v** dan **v** x **u**.

Jawab:

$$\mathbf{u} \text{ x } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 26\hat{i} - 12\hat{j} + 16\hat{k} = (26,\ -12,\ 16)$$

$$\mathbf{v} \text{ x } \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -26\hat{i} + 12\hat{j} - 16\hat{k} = (-26,\ 12,\ -16)$$

Sifat-sifat Hasil Kali Silang:
Jika **u**, **v**, **w** $\in R^3$, k skalar, berlaku:

a. (**u** x **v**)**•u** = 0 {*vektor* **u** x **v** *tegak lurus pada vektor* **u**}
b. (**u** x **v**)**•v** = 0 {*vektor* **u** x **v** *tegak lurus pada vektor* **v**}
c. 7**u** x **v**7^2=7**u**7^{2}7**v**7^2 – (**u•v**)^2 {*identitas Lagrange*}
d. **u** x **v** = - (**v** x **u**) {*tidak komutatif*}
e. **u** x **u** = **o** {*nol terhadap diri sendiri*}
f. **u** x (**v** + **w**) = **u** x **v** + **u** x **w** {*distributif*}
g. (**u** + **v**) x **w** = **u** x **w** + **v** x **w** {*distributif*}
h. k(**u** x **v**)= (k**u**) x **v** = **u** x (k**v**)
i. **u** x **o** = **o** x **u** = **o**

Dari identitas Lagrange didapat:

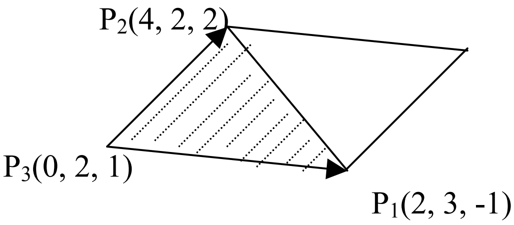
$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin\theta$ {*luas jajaran genjang yang dibentuk oleh* ***u*** *dan* **v**}

Contoh:

Tentukan luas segitiga yang mempunyai titik-titik sudut: $P_1(2, 3, -1)$, $P_2(4, 2, 2)$, dan $P_3(0, 2, 1)$.

Jawab:

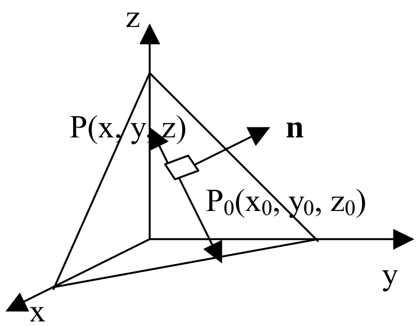
Kondisi yang mungkin dari segitiga digambarkan di bawah ini:



Segitiga yang dicari adalah segitiga yang diberi arsir, dan terlihat segitiga tersebut merupakan setengah dari jajaran genjang yang dibentuk oleh vektor $\overrightarrow{P_3P_1} = (2, 1, -2)$ dan $\overrightarrow{P_3P_2} = (4, 0, 1)$, sedangkan $\overrightarrow{P_3P_2} \times \overrightarrow{P_3P_1} = (-1, 10, 4)$, sehingga:

Luas segitiga = $\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P_3P_2} \times \overrightarrow{P_3P_1}\right\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+100+16} = \dfrac{1}{2}\sqrt{117}$ satuan luas

Di R^2, sebuah garis dapat ditentukan melalui satu titik dan kemiringannya, begitupun sebuah bidang di R^3, dapat ditentukan dengan satu titik dan inklinasinya (kemiringan di bidang), namun ide inklinasi ini, sulit untuk dinyatakan secara mudah, untuk itu diperlukan vektor yang mempunyai kemiripan dengan ide inklinasi, yang disebut vektor **normal**, yaitu vektor yang tegak lurus (ortogonal) pada setiap vektor di bidang.



Pada gambar di atas diketahui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ sebuah titik yang berada di bidang, dan vektor normal $\mathbf{n}=(a, b, c)$ yang tegak lurus pada setiap vektor di bidang. Setiap vektor di bidang dapat dinyatakan sebagai vektor yang titik awalnya di $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dengan titik akhir $P(x, y, z)$, sehingga didapat persamaan:

$$\overrightarrow{P_0P} \bullet \mathbf{n} = 0$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \bullet (a,\ b,\ c) = 0$$

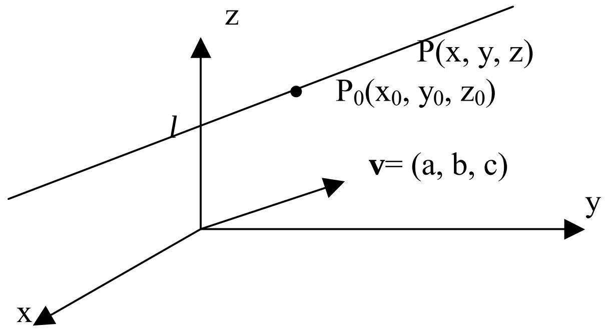
$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ {*disebut persamaan normal titik*}

$ax + by + cx + d = 0$, dimana $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ {*disebut bentuk umum bidang*}

Contoh:
Tentukan persamaan bidang yang melalui titik P_0 (2, -3, 1) dan tegak lurus pada vektor **n**=(2, 1, 4).

Jawab:
$\overrightarrow{P_0P} \bullet \mathbf{n} = 0$
$(x - 2, y + 3, z - 1)\bullet(2, 1, 4) = 0$
$2(x - 2) + 1.(y + 3) + 4(z - 1) = 0$
$2x + y + 4z - 5 = 0$

Sedangkan sebuah garis dapat dikatakan sebagai vektor yang panjangnya tak terbatas, dapat digambarkan sebagai berikut:



Dari gambar di atas vektor $\overrightarrow{P_0P}$ sejajar dengan vektor **v** yang disebut vektor arah, karena itu garis *l* dapat dinyatakan oleh :

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v} \text{ dengan } -\infty < t < \infty$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a,\ b,\ c) \text{ dengan } -\infty < t < \infty$$

$x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + ct$ dengan $-\infty < t < \infty$ {*disebut persamaan parametrik*}

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$ {*disebut persamaan perbandingan*}

Contoh:
Tentukan persamaan garis yang sejajar dengan vektor **v**=(-2, -1, 3) dan melalui titik P_0(0, 2, 1).

Jawab:
$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$
$(x, y - 2, z - 1) = t(-2, -1, 3)$
$x = -2t$, $y = 2 - t$, $z = 1 - 3t$, $-\infty < t < \infty$

Contoh:
Tentukan persamaan bidang yang tegak lurus pada garis $x = 2 + t$, $y = 1 - 2t$, $z = -3$.

Jawab:
Vektor yang sejajar pada garis (1, -2, 0). Dan titik yang dilalui oleh garis: (2, 1, -3).

Bidang tegak lurus pada garis berarti vektor arah garis menjadi vektor normal bidang, dan bidang melalui titik yang dilalui oleh garis, sehingga:
$(x-2, y-1, z+3)\bullet(1, -2, 0) = 0$
Sehingga persamaan bidangnya: $x - 2y = 0$

Persamaan bidang $ax + by + cz = d$ dapat dituliskan dalam bentuk vektor, sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dfrac{d-ax-by}{c} \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/c \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -b/c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d/c \end{bmatrix}$$

Sedangkan persamaan parametrik garis $x = x_o + at$, $y = y_o + bt$, $z = z_o + ct$, $-\infty < t < \infty$, jika dituliskan dalam bentuk vektor, menjadi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, -\infty < t < \infty$$

Latihan:
1. Misalkan **u**=(1, 0, 1), **v**=(-1, 1, -2), dan **w**=(3, 2, -1). Hitunglah:
   a. **u** × **v**
   b. **u** × (**v** × **w**)
   c. (**u** × **v**) × **w**
   d. **u** × (**v** + 2**w**)
   e. (**u** × **v**) - 3**w**
   f. (**u** + **v**)×**w**
2. Tentukan vektor yang ortogonal pada **u**=(1, 0, 2) dan sekaligus pada **v**=(-1, 1, -1).
3. Tunjukkan bahwa jika **u**=(u_1, u_2, u_3), **v**=(v_1, v_2, v_3), maka **uxv** tegak lurus dengan **u** dan juga tegak lurus pada **v**.
4. Tentukan luas segitiga yang titik sudutnya $P_1(7, -2, 2)$, $P_2(1, 0, 2)$ dan $P_3(2, -1, 2)$.
5. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik-titik: $P_1(1, -2, 0)$, $P_2(1, 0, 2)$, dan $P_3(2, -1, 3)$.
6. Tentukan persamaan garis yang melalui $P_1(5, -2, 3)$, dan $P_2(1, 1, 2)$.
7. Apakah syarat dua bidang saling sejajar? (Petunjuk perhatikan komponen pembentuk persamaan bidang)
8. Apakah syarat dua garis di R^3 saling sejajar? (Petunjuk: perhatikan komponen pembentuk persamaan garis di R^3)
9. Tentukan persamaan bidang yang sejajar dengan garis $x = 2 - t$, $y = 2t$, $z = 3 + 2t$.
10. Tentukan persamaan garis yang dibentuk oleh perpotongan bidang $-2x+3y-z+2=0$ dan $x+2y-3z+5=0$.
11. Tunjukkan apakah titik Q(2, 1, 2) terletak pada garis *l*: $x = 2 - t$, $y = 2t$, $z = 3 + 2t$, $-\infty < t < \infty$ tentukan pula persamaan bidang yang melalui titik Q dan tegak lurus pada garis *l*.
12. Tentukan titik perpotongan antara bidang $2x - 3y + 2z + 2 = 0$ dengan garis $x = 3 - 2t$, $y = 1 + t$, $z = -3 + 2t$, $-\infty < t < \infty$.

13. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik (3, -2, 4) dan memuat garis $x = t$, $y = 2 + 3t$, $z = -1 - 2t$, $-\infty < t < \infty$.
14. Tunjukkan bahwa garis $x = -1 + 4t$, $y = 3 + t$, $z = 1$, dan $x = -13 + 12t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2 + 3t$, $-\infty < t < \infty$, saling berpotongan dan tentukan titik potongnya.
15. Carilah persamaan bidang yang melalui titik (2, -1, 3) dan tegak lurus pada garis perpotongan antara bidang $2x+3y - 2z + 10 = 0$ dan $x + 3y + 2z - 8 = 0$.
16. Carilah persamaan bidang yang memuat kedua garis pada soal no. 13

ELIMINASI GAUSS

A. Sistem Persamaan Linier

Bentuk umum Persamaan Linier:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ disebut koefisien

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ disebut anu (unknown)

b disebut suku konstan

Solusi Persamaan Linier adalah sehimpunan bilangan terurut yang jika disubtitusikan kedalam Persamaan Linier, menjadi valid.

Contoh:

solusi persamaan linier 2x – 3 y + z = 5 adalah: {x=1, y=2, z=9}, tetapi {x=9, y=1, z=2} bukan solusi persamaan linier tersebut, walaupun angka-angka dalam himpunan tersebut seperti dalam solusi, karena urutan dibalik.

Sistem Persamaan Linier (SPL): sehimpunan Persamaan Linier yang menjadi satu kesatuan.

Bentuk umum Sistem Persamaan Linier:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Sistem Persamaan Linier di atas mempunyai n anu dan m persamaan.

Solusi Sistem Persamaan Linier adalah solusi setiap persamaan linier yang terdapat dalam Sistem Persamaan Linier tersebut.

Contoh:

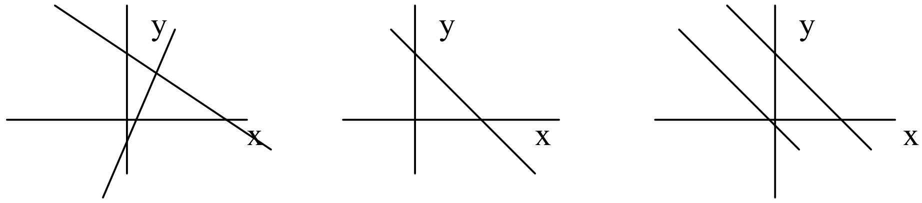
$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = -5 \\ -3x - 2y = 12 \end{array}\right\}$$

Solusi Sistem Persamaan Linier diatas adalah {x=2, y=-9}, sedangkan {x=0, y=-5} bukan solusi SPL, karena hanya merupakan solusi persamaan yang pertama saja.

Sistem Persamaan Linier mempunyai tiga kemungkinan banyaknya solusi, yaitu:

1. Solusi Tunggal
2. Solusi Tak Hingga banyaknya
3. Tak ada solusi

Ketiga kemungkinan banyaknya solusi ini dapat digambarkan sebagai kombinasi dua buah garis pada bidang xy, yaitu:



berpotongan pada satu titik ≈ solusi tunggal	berhimpit=berpotongan pada tak hingga banyaknya titik ≈ solusi tak hingga banyaknya	sejajar=tak berpotongan pada satu titik pun ≈ tak ada solusi

Sistem Persamaan Linier yang mempunyai solusi, baik solusi tunggal maupun solusi tak hingga banyaknya disebut **konsisten**. Jika tak mempunyai solusi disebut **tak konsisten**.

Latihan:

1. Manakah dari persamaan dibawah ini yang merupakan persamaan linier?
   a. $2x + 4\sqrt{y} - 3z = 1$
   b. $-3xy - 2y + 5z = 2$
   c. $(\sin 2)x + e^{-3}y + 20z = 3$
   d. $3x + 2x^2 - 5x^5 = 8$
   e. $-x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$

2. Manakah yang menjadi solusi persamaan linier: $2x + 3y - z = -1$
   a. {x=0, y=-1, z=3}
   b. {x=1, y=2, z=9}
   c. {x=2, y=1, z=5}
   d. {x=-1, y=0, z=-1}
   e. $\{t, s \in R \mid x=t, y=s, z=1 + 2t + 3s\}$

3. Manakah dari sehimpunan persamaan di bawah ini yang merupakan sistem persamaan linier?

a. $\left.\begin{array}{r} -x+0{,}5y=0 \\ 2x+3y=0 \end{array}\right\}$

b. $\left.\begin{array}{r} x+x^2-x^3=1 \\ 2x-x^2+x^3=-1 \\ x-x^2+x^3=5 \end{array}\right\}$

c. $\left.\begin{array}{r} x-2\,{}^{x}\!/_{y}+3z=0 \\ 2x+{}^{x}\!/_{y}-z=0 \\ 3x+{}^{y}\!/_{x}+z=0 \end{array}\right\}$

d. $\left.\begin{array}{ccccccc} 2\sin\alpha & - & \cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 3 \\ 4\sin\alpha & + & 2\cos\beta & - & 2\tan\gamma & = & 2 \\ 6\sin\alpha & - & 3\cos\beta & + & \tan\gamma & = & 9 \end{array}\right\}$

e. $\left.\begin{array}{r} 2x+\sin y=0 \\ -xy+3y=1 \end{array}\right\}$

4. Manakah yang menjadi solusi sistem persamaan linier :

$$\left.\begin{array}{ccccccc} -x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & - & 3y & + & 3z & = & 3 \\ 2x & - & 5y & - & z & = & -5 \end{array}\right\}$$

a. {x=-2, y=0, z=1}
b. {x=1, y=1, z=2}
c. {x=1, y=-2, z=-1}
d. $\{t \in R \mid x=3t-5,\ y=t-1,\ z=t\}$
e. {x=0, y=2, z=-1}

5. Lakukan pemisalan sehingga sehimpunan persamaan di bawah ini, menjadi sistem persamaan linier:

a. $\left.\begin{array}{r} x+x^2-x^3=1 \\ 2x-x^2+x^3=-1 \\ x-x^2+x^3=5 \end{array}\right\}$

b. $\left.\begin{array}{ccccccc} 2\sin\alpha & - & \cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 3 \\ 4\sin\alpha & + & 2\cos\beta & - & 2\tan\gamma & = & 2 \\ 6\sin\alpha & - & 3\cos\beta & + & \tan\gamma & = & 9 \end{array}\right\}$

B. Eliminasi Gauss-Jordan

Sistem Persamaan Linier:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda + a_{2n}x_n = b_2 \\ \mathrm{M} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \Lambda + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

dapat dinyatakan sebagai perkalian matrik, yaitu:

$$A\mathbf{X} = B$$

dimana A disebut matrik koefisien berordo mxn, X disebut matrik anu berordo nx1, dan B disebut matrik suku konstan berordo mx1, dan masing-masingnya adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Berdasarkan pengalaman di SMU penyelesaian sistem persamaan linier tidak mengubah anu, tetapi hanya mengoperasikan secara aritmatik: koefisien (yaitu dibuat menjadi nol, sehingga dengan sendirinya berkesan hilang) dan suku konstan. Karena itu SPL dapat diubah menjadi Matrik Lengkap/ Matrik yang Diperluas (*Augmented Matrix*), sehingga secara umum matrik lengkap, sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Terlihat pada matrik di atas, matrik koefisien (A) diperluas dengan menambahkan satu kolom yang berisikan matrik suku konstan (B).

Berikut diberikan ciri-ciri matrik lengkap yang sederhana (yang solusinya mudah didapat). Ciri-ciri ini hanya dilihat dari entri yang merupakan matrik koefisien, dan dilihat dari kiri ke kanan.

Matrik Eselon Baris Tereduksi, bercirikan:

1. Pada setiap baris, entri tak nol yang pertama adalah satu. Dan satu ini disebut satu utama
2. Jika terdapat baris nol diletakkan pada baris yang terbawah
3. Pada dua baris yang berurutan, letak satu utama pada baris yang lebih bawah terletak lebih ke kanan
4. Pada setiap kolom jika terdapat satu utama, entri yang lain nol.

Jika hanya memenuhi ciri 1, 2, dan 3 saja disebut Matrik Eselon Baris.

Jika kita telah mempunyai matrik lengkap yang berbentuk Matrik Eselon Baris Tereduksi, maka solusi SPL menjadi mudah ditemukan.

Contoh:

Pandang Matrik Lengkap, berikut:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \text{ jika dikembalikan ke bentuk SPL, menjadi } \left.\begin{aligned} 1.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 &= -1 \\ 0.x_1 + 1.x_2 + 0.x_3 &= 2 \\ 0.x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

$$\text{disederhanakan menjadi : } \left.\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}\right\} \text{ yang merupakan solusi dari SPL.}$$

Berikut diberikan contoh matrik eselon baris:

$$A = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right],\ B = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1\frac{1}{3} & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right],\ C = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Dari contoh di atas terlihat bahwa entri di bawah satu utama selalu nol.

Untuk mendapatkan solusi dari matrik eselon baris dilakukan subtitusi mundur, sebagai contoh akan diperlihatkan untuk matrik lengkap A, sebagai berikut:

Langkah pertama kembalikan matrik lengkap menjadi SPL:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 &= 1 \\ x_4 &= -2 \end{aligned}$$

dengan memindahkan semua anu tak utama (yang tidak bersesuaian dengan satu utama) ke ruas kanan didapat:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 2x_2 - 5x_3 \\ x_2 &= 1 + x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 \\ x_4 &= -2 \end{aligned}$$

lakukan subtitusi x_4 ke persamaan kedua didapat: $x_2 = 2 + x_3$, dan dengan mensubtitusi x_2 ke persamaan pertama, didapat: $x_1 = 2 - 2(2 + x_3) - 5x_3 = -2 - 7x_3$, terlihat sampai tahap ini x_3 menjadi anu bebas (bernilai sebarang bilangan riil), karena itu dapat digantikan dengan parameter, misalkan *t*, sehingga solusi matrik lengkap A adalah:

$$\{t \in R | x_1 = -2 - 7t, x_2 = 2 + t, x_3 = t, x_4 = -2\}$$

Berikut diberikan contoh matrik eselon baris tereduksi:

$$D = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right],\ E = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right],\ F = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \tfrac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

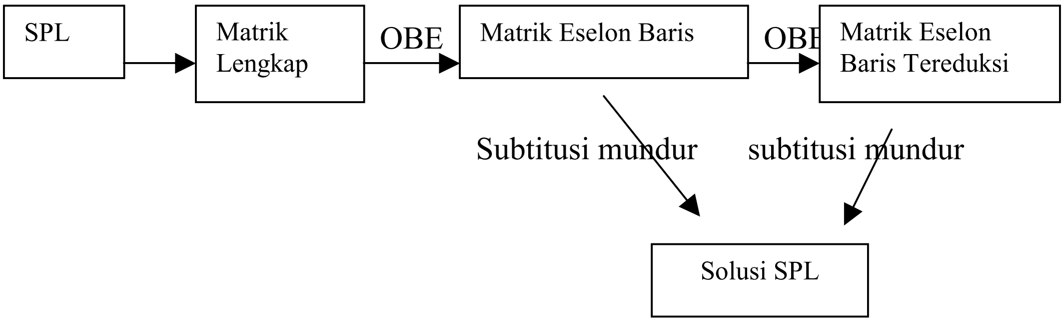
$$G = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Untuk matrik lengkap E, pada baris keempat, jika dikembalikan ke bentuk persamaan linier, didapat: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -15$, jelas terlihat bahwa persamaan linier yang demikian ini tidak mungkin terjadi, pada ruas kiri bernilai 0 sedangkan pada ruas kanan bernilai –15, karena itu berapapun nilai yang kita pilih untuk x_1, x_2, dan x_3, tidak akan terpenuhi, berarti pula SPL yang demikian ini tidak mempunyai solusi (tak konsisten).

Untuk memudahkan pencarian solusi, matrik lengkap diubah minimal menjadi matrik eselon baris atau menjadi matrik eselon baris tereduksi. Untuk mengubah matrik lengkap tersebut diperlukan operasi yang tidak mengubah solusi dari SPL, yaitu Operasi Baris Elementer (OBE):

1. Mengalikan satu baris dengan konstanta tak nol
2. Menukar tempat dua baris
3. Menjumlahkan kelipatan satu baris dengan baris yang lain

Metode pengubahan (pencarian solusi SPL) dikenal dengan nama Eliminasi Gauss (jika matrik lengkap diubah menjadi matrik eselon baris dan dilakukan subtitusi mundur) atau Eliminasi Gauss-Jordan (jika matrik lengkap diubah menjadi matrik eselon baris tereduksi dan dilakukan subtitusi mundur). Skema pencarian solusi ini dapat digambarkan sebagai berikut:



Contoh:

Tentukan solusi SPL berikut:

$$\left.\begin{array}{rrrrrl} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & +3x_5 & =2 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & -2x_5 & =0 \\ & 3x_2 & -x_3 & +2x_4 & -x_5 & =-1 \\ 2x_1 & & +2x_3 & -3x_4 & +x_5 & =3 \end{array}\right\}$$

Jawab:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right]\begin{array}{l} b_2 - b_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & -2 & -5 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ b_2 - 3b_1 \\ \\ b_4 - 2b_1 \end{array} \sim$$

Entri baris 1 kolom 1 harus satu, sehingga dilakukan OBE yang ketiga, antara baris pertama (b_1) dan kedua (b_2)

Entri di bawah satu utama harus nol, shg dilakukan OBE yang ketiga untuk baris kedua (b_2) dan baris ketiga (b_3)

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 5 & 13 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 11 & 7 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -b_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & -13 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 11 & 7 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ b_3 - 3b_2 \\ b_4 + 2b_2 \end{array} \sim$$

Entri baris 2 kolom 2, harus satu utama, untuk itu dilakukan OBE yang pertama pada b_2

Entri di bawah satu utama harus nol, shg dilakukan OBE yang ketiga untuk b_3 dan b_4

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & -13 & -6 \\ 0 & 0 & -16 & 17 & 38 & 17 \\ 0 & 0 & 8 & -9 & -15 & -5 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ b_4 \\ b_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & -13 & -6 \\ 0 & 0 & 8 & -9 & -15 & -5 \\ 0 & 0 & -16 & 17 & 38 & 17 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ b_4 + 2b_3 \end{array} \sim$$

Karena entri baris 3 kolom 3 dan baris 4 kolom 3 berkelipatan, untuk membuat nol, tentunya mudah, oleh karena cukup dilakukan OBE yang kedua, menukar b_3 dan b_4

Untuk membuat nol entri baris 4 kolom 3, cukup dilakukan OBE yang ketiga, yaitu dengan menjumlahkan b_4 dengan 2 kali lipat b_3

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & -13 & -6 \\ 0 & 0 & 8 & -9 & -15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & -7 \end{array}\right]\begin{array}{l} b_1 + 2b_4 \\ b_2 + 5b_4 \\ b_3 + 9b_4 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 & -21 & -16 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -53 & -41 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -87 & -68 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & -7 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{8} b_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

Jika b_3 dikalikan dengan 1/8 didapat matrik eselon baris, dan jika diguna-kan eliminasi Gauss, lakukan subtitusi mundur. Dalam contoh ini, akan diteruskan menjadi matrik eselon baris tereduksi, OBE kembali dilakukan untuk membuat entri di atas satu utama nol, yaitu OBE yang ketiga untuk b_3, b_2, dan b_1

Untuk mendapatkan satu utama pada baris 3 kolom 3, tidak ada cara lain, selain melakukan OBE yang pertama, yaitu mengalikan b_3 dengan 1/8

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 & -21 & -16 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -53 & -41 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-87}{8} & \frac{-68}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & -7 \end{array}\right]\begin{array}{l} b_1 - 2b_3 \\ b_2 - 5b_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{6}{8} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{8} & \frac{135}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-87}{8} & \frac{-68}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & -7 \end{array}\right]\begin{array}{l} b_1 - b_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

Entri di atas satu utama baris 3 kolom 3, harus nol, karena itu dilakukan OBE ketiga pada b_2 dan b_1

Entri di atas satu utama baris 2 kolom 2, harus nol, karena itu dilakukan OBE ketiga pada b_1

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-5}{8} & \frac{-127}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{8} & \frac{135}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-87}{8} & \frac{-68}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & -7 \end{array}\right]$$

Sampai di sini telah didapat matrik eselon baris tereduksi. Solusi didapat dengan mengembalikan matrik lengkap menjadi SPL dan dilakukan subtitusi mundur diubah ke SPL, menjadi $\left.\begin{aligned} x_1 - \tfrac{5}{8}x_5 &= \tfrac{-127}{8} \\ x_2 + \tfrac{11}{8}x_5 &= \tfrac{135}{8} \\ x_3 - \tfrac{87}{8}x_5 &= \tfrac{-68}{8} \\ x_4 - 8x_5 &= -7 \end{aligned}\right\}$ karena x_5 dapat bernilai sebarang bilangan riil, maka dapat diganti dengan parameter bilangan riil, misalkan t, sehingga solusi SPL : $\left\{ t \in R \,\middle|\, x_1 = \tfrac{-127}{8} + \tfrac{5}{8}t, x_2 = \tfrac{135}{8} - \tfrac{11}{8}t, x_3 = \tfrac{-68}{8} + \tfrac{87}{8}t, x_4 = -7 + 8t, x_5 = t \right\}$

Latihan:

1. Bentuklah Sistem Persamaan Linier, berikut menjadi matrik lengkap:

   a. $\left.\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 4 \\ 3x & + & 2y & = & -4 \end{array}\right\}$

   b. $\left.\begin{array}{llll} -2x_1 & +3x_2 & & =-1 \\ x_1 & & +x_3 & =4 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & =8 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & =7 \end{array}\right\}$

   c. $\left.\begin{array}{llllll} 4x_1 & & +6x_3 & +3x_4 & -x_5 & =3 \\ -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & -3x_4 & +5x_5 & =-1 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_4 & -3x_5 & =2 \\ 2x_1 & -x_2 & +5x_3 & & +2x_5 & =1 \end{array}\right\}$

2. Tentukan solusi dari SPL yang mempunyai matrik lengkap berbentuk matrik eselon baris dan matrik eselon baris tereduksi, yaitu: B, C, D, F, dan G di atas.

3. Lakukan Eliminasi Gauss untuk mendapatkan solusi SPL, berikut:

   a. Sistem Persamaan Linier pada no. 1a

   b. $\left.\begin{array}{ccccccc} 3x & - & y & + & z & = & -2 \\ x & + & 5y & + & 2z & = & 6 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right\}$

   c. Sistem Persamaan Linier pada no. 1b.

   d. $\left.\begin{array}{lllll} 5x_1 & +2x_2 & +10x_3 & +16x_4 & =16 \\ 3x_1 & +x_2 & & -2x_4 & =4 \\ 3x_1 & +x_2 & -9x_3 & -19x_4 & =-4 \\ 4x_1 & +x_2 & & -3x_4 & =5 \end{array}\right\}$

   e. Sistem Persamaan Linier pada no. 1c.

4. Lakukan Eliminasi Gauss-Jordan untuk mendapatkan solusi pada SPL no. 3

C. Sistem Persamaan Linier Homogen

Sistem Persamaan Linier Homogen adalah Sistem Persamaan Linier yang semua suku konstannya nol, sehingga bentuk umum SPL homogen, sebagai berikut:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

karena semua suku konstan nol, maka jika dilakukan OBE tetap saja suku konstannya nol, karena itu matrik lengkap SPL homogen sering disingkat tanpa memasukkan kolom suku konstan, yaitu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

SPL homogen selalu konsisten, minimal mempunyai **solusi nol** $\{x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0\}$, yang disebut **solusi trivial**. Jika terdapat solusi yang lain, disebut **solusi tak trivial**.

Contoh:

Tentukan solusi SPL homogen berikut:

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

Jawab:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{array}{l} b_1 + b_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ b_2 + 2b_1 \\ b_3 - 2b_1 \\ b_4 - 3b_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \tfrac{1}{7}b_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ b_3 + 9b_2 \\ b_4 + 5b_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} b_1 - 3b_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

diubah ke SPL menjadi $\begin{matrix} 1.x_1 + 1.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 = 0 \\ 0.x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 + 1.x_4 = 0 \\ 0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 = 0 \\ 0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 = 0 \end{matrix}$ atau $\begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{matrix}$ atau $\begin{matrix} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_4 \end{matrix}$,

karena x_2 dan x_4 bernilai sebarang bilangan riil, maka dapat diganti dengan parameter, misalkan, $x_2=t$ dan $x_4=s$, sehingga solusi SPL homogen tersebut:

$\{t, s \in R | x_1 = -t, x_2 = t, x_3 = -s, x_4 = s\}$

Kita tutup bagian ini dengan satu teorema yang penting, yaitu:

Sistem Persamaan Linier Homogen selalu mempunyai solusi tak trivial, jika banyaknya anu lebih besar dibandingkan banyaknya persamaan.

Latihan:

1. Tentukan solusi SPL Homogen dibawah ini:

a. $\left.\begin{matrix} 2x - 3y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{matrix}\right\}$

b. $\left.\begin{matrix} x + 2y - z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x + 4y - 3z = 0 \end{matrix}\right\}$

c. $\left.\begin{matrix} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{matrix}\right\}$

d. $\left.\begin{matrix} x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{matrix}\right\}$

2. Jika matrik lengkap SPL homogen dinyatakan di bawah ini, tentukan solusinya:

a. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Latihan Campuran:

1. Tentukan solusi dari SPL :

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 12x_2 & - & 11x_3 & - & 16x_4 & = & 5 \end{array}\right\}$$

2. Tentukan syarat yang harus dipenuhi β agar SPL homogen di bawah ini, mempunyai solusi tak trivial:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & \beta z & = & 0 \\ 2x & + & \beta y & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

4. Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, tentukan nilai α, β dan γ, dengan syarat $0 \le \alpha,\ \beta,\ \gamma \le 2\pi$.

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 2\sin\alpha & - & \cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 3 \\ 4\sin\alpha & + & 2\cos\beta & - & 2\tan\gamma & = & 2 \\ 6\sin\alpha & - & 3\cos\beta & + & \tan\gamma & = & 9 \end{array}\right\}$$

5. Tentukan nilai a, sehingga Sistem Persamaan Linier berikut mempunyai : solusi tunggal, solusi tak hingga banyaknya, ataupun tidak mempunyai solusi.

$$\begin{array}{lllll} x & +y & -z & +w & =0 \\ 2x & +4y & & -2w & =4 \\ 3x & +2y & -z & & =1 \\ & 2y & +2z & +(a^2-5)w & =a+3 \end{array}$$

6. Tentukan k, sehingga Sistem Persamaan Linier Homogen berikut mempunyai solusi

$$\text{tak trivial}\quad \begin{array}{lllll} 4x & +y & +z & = & 0 \\ 3x & +y & -z & = & 0 \\ x & +y & +kz & = & 0 \end{array}$$

7. Tentukan syarat bagi *a* dan *b* agar Sistem Persamaan Linier : memiliki solusi tunggal, memiliki solusi jamak atau tidak memiliki solusi.

$$\begin{cases} -x + 3y - 2z = -8 \\ x + z = 2 \\ 3x + 3y + az = b \end{cases}$$

8. Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, tentukan solusi sistem persamaan linier berikut:

$$\begin{cases} 3x & + & 2y & - & z & + & 3w & = & 1 \\ 4x & + & 5y & & & + & 2w & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & - & 3w & = & 3 \\ & & 6y & + & 2z & + & w & = & 0 \end{cases}$$

9. Tentukan syarat untuk λ sehingga SPL homogen di bawah ini mempunyai solusi trivial:

$$\begin{array}{ccccc} (\lambda-3)x & + & y & = & 0 \\ x & + & (\lambda-3)y & = & 0 \end{array}$$

10. Diberikan SPL di bawah ini, tentukan nilai a dan b, jika SPL mempunyai solusi tunggal: $\{x = 1, y=-1, z = 2\}$

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & - & 3z & = & -3 \\ -2x & - & by & + & cz & = & -1 \\ ax & + & 3y & - & cz & = & -3 \end{array}$$

INVERS MATRIK

A. Mencari A^{-1} menggunakan Matrik Elementer

Matrik bujur sangkar, A=[a_{ij}] dengan i=1, 2, ..., n dan j=1, 2, ..., n, disebut mempunyai invers jika terdapat matrik A^{-1}, sehingga

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I,$$

dimana I matrik satuan

Jika A mempunyai invers, maka A disebut matrik **tak singular**. Dan jika tidak mempunyai invers disebut matrik **singular**.

Jika A mempunyai invers, maka invers-nya tunggal (unik). Untuk menunjukkan hal ini, perhatikan penjelasan di bawah ini:

Andaikan B dan C invers dari A, maka dipenuhi hubungan BA=I dan CA=I, sehingga

$$B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C$$

Jadi, B = C, atau kedua invers matrik tersebut tunggal.

Sifat-sifat invers matrik:

a. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$
b. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
c. $(kA)^{-1}=(1/k)A^{-1}$, dimana k: skalar (bilangan riil)
d. $A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1}}_{\text{sebanyak n kali}} = \left(\underbrace{AA\ldots A}_{\text{sebanyak n kali}}\right)^{-1}$, jika $n = 1,2,\ldots$

Untuk mendapatkan invers suatu matrik, salah satu metode yang dapat dilakukan adalah menggunakan matrik elementer.

Definisi: Matrik elementer adalah matrik bujursangkar yang diperoleh dari matrik satuan yang sesuai, yang dikenai **hanya oleh satu** Operasi Baris Elementer.

Contoh Matrik Elementer:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

E_1 diperoleh dari matrik satuan berordo 2x2 yang dikenai satu Operasi Baris Elementer yang pertama, yaitu mengalikan baris kedua dengan konstanta –3. E_2 diperoleh dari matrik satuan 3x3 yang dikenai satu Operasi Baris Elementer yang kedua, yaitu menukar baris kedua dengan baris ketiga. Sedangkan E_3 dikenai Operasi Baris Elementer yang ketiga, yaitu Menjumlahkan kelipatan –5 baris ketiga dengan baris pertama. Sedangkan matrik $E4$ bukan matrik elementer, karena tidak mungkin melakukan operasi baris elementer sehingga matrik satuan menjadi matrik yang baris keduanya menjadi baris nol.

Perkalian matrik elementer dengan sebarang matrik yang sesuai dari sebelah kiri, akan mempunyai pengaruh, sebagaimana melakukan operasi baris elementer terhadap matrik tersebut.

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, didapat $E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

dan $E_3 A = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 5 & -28 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Perkalian matrik elementer dengan sebarang matrik asalkan memenuhi syarat perkalian dua matrik dari sebelah kanan mempunyai efek sebagaimana operasi kolom elementer dikenakan pada matrik tersebut.

Keistimewaan yang lain, setiap operasi baris elementer yang mengubah matrik satuan menjadi matrik elementer, mempunyai lawan, yang mengubah matrik elementer menjadi matrik satuan. Kenyataan ini ditabelkan di bawah ini:

OBE yang mengubah I menjadi E	***OBE yang mengubah E menjadi I***
Mengalikan satu baris dengan konstanta *c≠0*	Mengalikan satu baris dengan *1/c*
Menukar baris ke-*i* dengan baris ke-*j*	Menukar baris ke-*i* dengan baris ke-*j*
Menjumlahkan kelipatan *k* kali baris ke-*i* dengan baris ke-*j*	Menjumlahkan kelipatan *–k* kali baris ke-*i* dengan baris ke-*j*

Setiap matrik elementer mempunyai invers dan inversnya adalah matrik elementer yang diperoleh dari lawan operasinya.

Jika A matrik bujursangkar nxn, dan matrik A ekivalen baris dengan matrik satuan I_n, maka dapat ditemukan m matrik elementer, sehingga jika dikalikan dengan matrik A, maka matrik A tersebut menjadi matrik satuan, misalkan:

$$E_m \ldots E_2E_1A=I_n$$

Karena setiap matrik elementer mempunyai invers, maka jika dilakukan perkalian dengan invers masing-masing matrik elementer, didapat:

$$E_1^{-1}E_2^{-1} \ldots E_m^{-1}\, E_m \ldots E_2E_1A= E_1^{-1}E_2^{-1} \ldots E_m^{-1}\, I_n$$

Atau

$$A= E_1^{-1}E_2^{-1} \ldots E_m^{-1}\, I_n$$

Persamaan di atas menyatakan bahwa matrik A mempunyai invers.

Sebaliknya jika A mempunyai invers, berarti dipenuhi hubungan:

$$A^{-1}A=I$$

Dengan mengambil

$$A^{-1}= E_m \ldots E_2E_1I_n$$

karena matrik invers tunggal, maka diperoleh, jika A mempunyai invers, maka A ekivalen baris dengan matrik satuan I.

Dari hasil di atas, cara praktis mendapatkan invers dari suatu matrik bujursangkar, yaitu dengan melakukan serangkaian operasi baris elementer secara bersamaan antara matrik A dengan matrik satuan I, dengan target mengubah matrik A menjadi matrik satuan I dan akibatnya didapatlah perubahan matrik I menjadi matrik A^{-1}, jika A tidak bisa menjadi matrik satuan, berarti A tidak mempunyai invers.

Atau digambarkan sebagai berikut:

$$[A \mid I] \overset{OBE}{\sim} [I \mid A^{-1}]$$

Contoh: Tentukan invers dari matrik berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 12 & -3 & 7 \\ -3 & 1 & -2 \\ 15 & -3 & 7 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -b_1 \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ b_2 - 3b_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \tfrac{1}{7} b_2 \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \tfrac{3}{7} & \tfrac{1}{7} \end{array}\right] \begin{matrix} b_1 + 2b_2 \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\tfrac{1}{7} & \tfrac{2}{7} \\ 0 & 1 & \tfrac{3}{7} & \tfrac{1}{7} \end{array}\right]$$

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{7} & \tfrac{2}{7} \\ \tfrac{3}{7} & \tfrac{1}{7} \end{bmatrix}$

$$[B \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 12 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 15 & -3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} b_2 \\ b_1 \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & -3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ b_2 + 4b_1 \\ b_3 + 5b_1 \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ b_3 - 2b_2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} b_1 - 2b_3 \\ b_2 - b_3 \\ \end{matrix} \sim$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 0 & 4 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} b_1 - b_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -\tfrac{1}{3} b_1 \\ \\ -b_3 \end{array} \sim
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\tfrac{1}{3} & 0 & \tfrac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right]
$$

Jadi, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{3} & 0 & \tfrac{1}{3} \\ 3 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$
[C \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} b_1 - b_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ b_2 - 3b_1 \\ b_3 + 4b_1 \end{array} \sim
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 4 & -4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ b_3 + 2b_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right]
$$

Karena baris ketiga berupa baris nol yang berarti pula A tidak ekivalen baris dengan matrik satuan I, maka pada kasus ini matrik C tidak mempunyai invers.

Jika matrik koefisien dari suatu sistem persamaan linier mempunyai invers, maka solusi sistem persamaan linier tersebut didapat dengan mengalikan invers matrik koefisien tersebut dengan suku konstannya, yaitu:
AX=B, jika A^{-1} ada, maka, $X=A^{-1}B$

Contoh:
Tentukan solusi dari sistem persamaan linier, berikut:

$$
\begin{array}{rcrcrcr} 12x & + & 6y & + & z & = & 3 \\ -6x & - & 3y & - & z & = & 2 \\ 8x & + & 3y & & & = & -1 \end{array}
$$

Jawab:
Matrik koefisien sistem persamaan linier di atas adalah:

$$
\begin{bmatrix} 12 & 6 & 1 \\ -6 & -3 & -1 \\ 8 & 3 & 0 \end{bmatrix}
$$

dan matrik suku konstannya:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari inversnya, bentuklah matrik lengkap yang diperbesar sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 12 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ b_2 + b_1 \\ \\ \end{array} \sim$$

karena target kita adalah mengubah matrik koefisien menjadi matrik satuan, maka langkah paling mudah adalah dengan menjumlahkan baris kedua dengan baris pertama, sehingga menjadi:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 12 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} b_1 - 2b_2 \\ \\ b_3 - b_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ b_2 - 3b_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \tfrac{1}{3}b_2 \\ \tfrac{1}{2}b_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \tfrac{4}{3} & \tfrac{4}{3} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} b_3 \\ \\ b_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \tfrac{4}{3} & \tfrac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Sehingga invers matrik koefisiennya adalah:

$$\begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{4}{3} & \tfrac{4}{3} & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, solusi sistem persamaan linier adalah:

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{4}{3} & \tfrac{4}{3} & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7\tfrac{2}{3} \\ -7 \end{bmatrix}$$

Contoh khas:

Encoding dan Decoding pesan-pesan rahasia

Encoding merupakan kegiatan untuk menyembunyikan pesan, sehingga orang yang tidak berhak tidak mampu mengetahui pesan yang sebenarnya, sedangkan encoding adalah kegiatan untuk menterjemahkan pesan yang telah diencoding, sehingga dapat diterima pesan aslinya.

Perhatikan urutan huruf-huruf berikut:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	blank			
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27			

Pesan: “pergi ke pati ” oleh urutan huruf-huruf di atas disampaikan dengan pesan tanpa encoding:
16 05 18 07 09 27 11 05 27 16 01 20 09 27
Jika digunakan matrik encoding:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

maka pesan terkirim menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 31 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 39 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ 89 \end{bmatrix}, \text{dst}$$

didapat:
26 31 32 39 63 89 21 26 59 75 41 61 63 89

Pada pihak yang menerima pesan, tentunya untuk bisa membaca pesan tersebut harus mengubah pesan yang diterima dengan melakukan kegiatan decoding, yaitu dengan mengalikan invers dari matrik encoding, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 26 \\ 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32 \\ 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 63 \\ 89 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 27 \end{bmatrix}, \text{dst}$$

sehingga pesan didapat diketahui dengan benar.

Latihan:

1. Tentukan matrik elementer yang menyebabkan matrik elementer di bawah ini menjadi matrik satuan (atau dengan istilah lain, invers matrik elementer):

   a. $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   b. $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   c. $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Untuk soal no. 2 sampai dengan 5 gunakan metode yang diberikan pada sub bab ini

2. Tentukan invers matrik di bawah ini, jika ada:

   a. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   b. $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

3. Tentukan invers matrik di bawah ini, jika ada:

a. $D = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b. $E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

c. $F = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

4. Tentukan invers matrik di bawah ini, jika ada:

a. $G = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 0 & 0 \\ 24 & 8 & 4 & 0 \\ 48 & 16 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

b. $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $K = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

5. Tentukan invers matrik di bawah ini, jika ada:

a. $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

b. $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Tentukan invers matrik diagonal, di bawah ini:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

7. Tunjukkan bahwa jika D matrik diagonal, maka D^{-1} adalah matrik diagonal yang entri-entri pada diagonal utama adalah invers dari entri-entri pada diagonal utama matrik D.

B. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier menggunakan Invers Matrik

Jika Sistem Persamaan Linier:

$$AX=B$$

dengan matrik koefisien berbentuk bujursangkar dan mempunyai invers, maka Sistem Persamaan Linier tersebut mempunyai solusi tunggal, yaitu:

$$A^{-1}AX=A^{-1}B$$
$$IX=A^{-1}B$$
$$X=A^{-1}B$$

Akibat: jika A matrik bujursangkar dan mempunyai invers, sistem persamaan linier homogen, AX=O hanya mempunyai solusi trivial saja.

Jika diberikan beberapa Sistem Persamaan Linier, dengan matrik koefisien bujursangkar, seperti:

$$AX=B_1,\ AX=B_2,\ \ldots,\ AX=B_k$$

Dan jika diketahui bahwa A mempunyai invers, maka penyelesaian serangkaian Sistem Persamaan Linier yang demikian ini menjadi mudah dan cukup sedikit perhitungan yang diperlukan, cukup mencari invers dan kemudian melakukan operasi perkalian matrik, yaitu:

$$X=A^{-1}B_1,\ X=A^{-1}B_2,\ \ldots,\ X=A^{-1}B_k$$

Dengan pengalaman ini, maka kita dapat memperbesar matrik lengkap kita untuk beberapa Sistem Persamaan Linier untuk kasus matrik koefisien sebarang, yaitu:

$$\left[A \vdots B_1 \vdots B_2 \vdots \ldots \vdots B_k\right]$$

Contoh:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ dan diketahui: $AX=B_1$, $AX=B_2$, $AX=B_3$

a. Tentukan solusi SPL-SPL tersebut dengan cara menentukan terlebih dahulu A^{-1}
b. Tentukan solusi SPL-SPL tersebut menggunakan matrik lengkap yang diperbesar.

Jawab:

a. $$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} b_3 \\ \\ b_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - 2b_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ b_3 - b_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{l} b_1 + 2b_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ -b_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, sehingga solusi SPL-SPL tersebut:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \text{ dan } X_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

b. $$[A \mid B_1 \mid B_2 \mid B_3] = \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 2 & 1 & 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right]\begin{array}{l} b_3 \\ \\ b_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - 2b_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & -6 & 6 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ b_3 - b_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -7 & 4 \end{array}\right]\begin{array}{l} b_1 + 2b_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & -7 & -12 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -7 & 4 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ -b_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & -7 & -12 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & -4 \end{array}\right]$$

Jadi, $X_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

Latihan:

1. Tentukan solusi SPL-SPL di bawah ini menggunakan metode perkalian dengan invers matrik koefisien

$$\begin{aligned} -x + 3y - 2z &= b_1 \\ 3x \qquad\quad + 3z &= b_2 \\ 2x + y + 2z &= b_3 \end{aligned}$$

   a. b_1=7, b_2=-3, b_3=-1
   b. b_1=5, b_2=2, b_3=-2
   c. b_1=3, b_2=0, b_3=-1
   d. b_1=2, b_2=5, b_3=3

2. Tentukan solusi SPL-SPL di bawah ini menggunakan metode perkalian dengan invers matrik koefisien.

$$\begin{aligned} x + 3y \qquad\quad &= b_1 \\ 2x + 6y + 4z &= b_2 \\ -x \qquad\quad + 2z &= b_3 \end{aligned}$$

   a. b_1=0, b_2=-3, b_3=0
   b. b_1=4, b_2=2, b_3=2
   c. b_1=-3, b_2=0, b_3=-1
   d. b_1=4, b_2=5, b_3=4

3. Tentukan solusi SPL-SPL pada soal no. 1 dengan menggunakan matrik lengkap yang diperbesar.
4. Tentukan solusi SPL-SPL pada soal no. 2 dengan menggunakan matrik lengkap yang diperbesar.
5. Tentukan solusi sistem persamaan linier di bawah ini, dengan menggunakan matrik lengkap yang diperbesar:

$$\begin{aligned} x + y - z &= a \\ 2x - 3y + 2z &= b \\ x - y + z &= c \end{aligned}$$

   Jika a. a=1, b=0, c=0,   b. a=0, b=1, c=0,   c. a=0, b=0, c=1 {soal ini menyatakan anda diminta mencari invers matrik koefisien dari sistem persamaan linier}

Latihan Campuran:

1. Selesaikanlah persamaan matrik di bawah ini:

   a. $X\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

   b. $X_{1x2}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}X_{1x2} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix}$

c. $X_{2x3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d. $X_{2x3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + X_{2x3}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} X_{3x2} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

2. Tunjukkan syarat yang berlaku atas matrik A dan B sehingga: $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, dengan catatan kedua matrik tersebut bujursangkar.
3. Jika diberikan matrik A seperti di bawah ini, tentukan syarat *a*, sehingga matrik A mempunyai invers, dan tentukan pula syarat untuk *a*, sehingga tak mempunyai invers:

   a. $\begin{bmatrix} (a-2) & 1 \\ 1 & (a-2) \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{bmatrix}$

4. Jika invers –4A seperti matrik di bawah ini, tentukan matrik A

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

5. Tunjukkan bahwa AB=BA jika dan hanya jika $AB^{-1}=B^{-1}A$

DETERMINAN

A. Ekspansi Kofaktor

Determinan merupakan fungsi dari matrik bujursangkar, nxn, ke bilangan riil.

Ada beberapa definisi yang dikembangkan dalam rangkaian determinan ini, dua yang terkenal adalah: menggunakan permutasi dan menggunakan kofaktor. Pendefinisian menggunakan permutasi terkesan rumit, karena itu dalam tulisan ini menggunakan definisi kofaktor yang bersifat rekursif (definisi menggunakan dirinya sendiri).

Lambang determinan matrik A adalah det(A) atau $|A|$.

Dari pelajaran di SMU, telah diketahui determinan dari matrik 2x2, sebagai berikut:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Lambang $|\ldots|$ dalam hal ini, bukanlah lambang nilai mutlak, tetapi lambang determinan.

Dan untuk matrik 3x3, determinan didefinisikan, sebagai berikut:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

cara penulisan di atas dapat diubah menjadi:

det(A)=

$$a_{11}(-1)^{1+1}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(-1)^{1+2}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(-1)^{1+3}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

atau dapat ditulis sebagai:

$$\det(A) = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

atau

det(A)=

$$a_{21}(-1)^{2+1}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(-1)^{2+2}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{23}(-1)^{2+3}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

$$\det(A) = a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Dari kenyataan di atas, bahwa determinan suatu matrik dapat dicari dengan menggunakan determinan matrik yang lebih kecil ukurannya (sub matrik), mendorong didefinisikannya determinan secara formal di bawah ini yang bersifat rekursif:

Definisi: Misalkan $A_{nxn}=[a_{ij}]$, maka **minor** dari a_{ij} , yang dilambangkan oleh M_{ij}, adalah determinan dari sub matrik A yang diperoleh dengan cara membuang semua entri pada baris ke-*i* dan semua entri pada kolom ke-*j*. Sedangkan **kofaktor** dari a_{ij}, yang dilambangkan oleh C_{ij}, adalah $(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Contoh:

Tentukan minor dan kofaktor dari entri a_{11}, a_{32}, a_{23} dari matrik A di bawah ini:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 14$$

Semua entri pada baris ke-1 dan semua entri pada kolom ke-1, dibuang. Kemudian dihitung determinannya

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

Semua entri pada baris ke-3 dan semua entri pada kolom ke-2, dibuang. Kemudian dihitung determinannya.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 22$$

Semua entri pada baris ke-2 dan semua entri pada kolom ke-3, dibuang. Kemudian dihitung determinannya.

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 14$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -(-4) = 4$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -22$$

Pada penghitungan kofaktor pangkat dari –1 (minus satu) dari index entri, dan terlihat pula jika jumlah index ini genap, maka kofaktor=minor, sedangkan jika ganjil kofaktor= (-1) minor

Dengan telah terdefinisikannnya minor dan kofaktor, maka dapatlah didefinisikan determinan, sebagaimana dalam definisi berikut:

Definisi: Misalkan $A_{nxn}=[a_{ij}]$, **determinan** dari A didefinisikan sebagai berikut:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

{karena baris ke-*i* menjadi acuan/ tetap, disebut: ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-*i*}

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

{karena kolom ke-*j* menjadi acuan/ tetap, disebut: ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-*j*}

Contoh:

Tentukan determinan matrik di bawah ini, dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris atau kolom yang paling sedikit perhitungannya:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Untuk memudahkan penghitungan determinan, pilih baris atau kolom yang paling banyak memuat entri nol. Karena perkalian entri dengan kofaktornya menghasilkan nol.

Pada kasus matrik A, dapat dipilih ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-2 atau kolom pertama.

{ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama}

$$\det(A) = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+1}M_{21} + (-5)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 164$$

{ekspansi kofaktor sepanjang baris kedua}

$$\det(A) = 5(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 6(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 164$$

Pada kasus matrik B, pilih ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama

$$\det(B) = 0C_{11} + 0C_{12} + 2C_{13} + 0C_{14} = 2C_{13} = 2M_{13}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -47$$

sehingga det(B) = - 94

Latihan:

1. Tentukan minor dari semua entri dari matrik di bawah ini:

a. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Tentukan kofaktor dari setiap entri pada matrik soal no. 1
3. Tentukan determinan dari setiap matrik pada soal no. 1

B. Sifat-sifat Determinan dan Reduksi Baris

Sifat-sifat determinan:

1. det(AB)=det(A)det(B)
2. det(A^T)=det(A)
3. Jika A matrik diagonal, maka det(A)=$a_{11}a_{22}...a_{nn}$ {perkalian dari semua entri pada diagonal utama}
4. Jika A matrik segitiga, maka det(A)=$a_{11}a_{22}...a_{nn}$ {perkalian dari semua entri pada diagonal utama}
5. Jika A_{nxn}, maka det(kA)=k^ndet(A)
6. det(A^{-1})=1/det(A)
7. Jika A memuat baris nol atau kolom nol, maka det(A)=0
8. Terhadap operasi baris elementer, determinan mempunyai sifat, sebagai berikut:
   a. Jika A' diperoleh dari A dengan cara mengalikan satu baris dari A dengan konstanta k≠0, maka det(A')=k det(A)
   b. Jika A' diperoleh dari A dengan cara menukar dua baris, maka det(A') = - det(A)

c. Jika A' diperoleh dari A dengan cara menjumlahkan kelipatan satu baris dengan baris yang lain, maka det(A')=det(A)

9. Jika A memuat dua baris yang saling berkelipatan atau dua kolom yang saling berkelipatan, maka det(A)=0

Dengan menggunakan sifat-sifat di atas, penghitungan determinan dapat lebih dipermudah, metode yang digunakan dinamakan metode **reduksi baris**, yaitu: dengan tetap memperhatikan sifat-sifat determinan, matrik diubah menjadi matrik segitiga.

Contoh:

Tentukan determinan matrik di bawah ini, menggunakan reduksi baris:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ -5 & 3 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ b_3 + 2b_1 \end{array}$$

Untuk memudahkan perhitungan, entri baris 1 kolom 1, lebih enak jika dijadikan satu. Salah satu caranya melakukan OBE ketiga. Pengaruh terhadap determinan tidak ada.

$$= \left|\begin{array}{ccc} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & -3 & 9 \end{array}\right| \begin{array}{l} b_1 + 2b_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

Di atas –1 harus nol, dilakukan OBE yang ketiga untuk b_1. Pengaruh terhadap determinan tidak ada

$$= \left|\begin{array}{ccc} 0 & -9 & 22 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & -3 & 9 \end{array}\right| \begin{array}{l} b_1 + 2b_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Pivot lebih enak jika bernilai satu atau minus satu, karena itu dilakukan OBE yang ketiga antara b_1 dan b_2. Pengaruh terhadap determinan tidak ada.

$$= \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 34 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & -3 & 9 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ b_2 - 5b_1 \\ \\ \end{array}$$

Di bawah pivot harus nol, maka dilakukan OBE yang ketiga antara b_2 dan b_1. Pengaruh terhadap determinan tidak ada.

$$= \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 34 \\ 0 & 0 & -164 \\ -1 & -3 & 9 \end{array}\right| \begin{array}{l} b_3 \\ \\ b_1 \end{array}$$

Untuk membentuk matrik segitiga, maka dilakukan OBE yang kedua, yaitu menukar b_1 dengan b_3. Pengaruh terhadap determinan –1.

$$= -\begin{vmatrix} -1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -164 \\ 0 & 1 & 34 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ b_3 \\ b_2 \end{matrix}$$

Dan sentuhan terakhir, agar menjadi matrik segitiga, dilakukan OBE kedua, yaitu menukar b_3 dan b_2. Pengaruh terhadap determinan –1.

$$= -(-)\begin{vmatrix} -1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 34 \\ 0 & 0 & -164 \end{vmatrix}$$

Matrik determinan telah berbentuk matrik segitiga, sehingga determinan mudah dihitung.

$$= -(-)(-1)1(-164) = 164$$

Penggunaan metode reduksi baris dan ekspansi kofaktor secara bersamaan, menyebabkan penghitungan determinan suatu matrik menjadi lebih mudah lagi. Hal ini diperlihatkan pada contoh di bawah ini:

Contoh:

Tentukan determinan matrik di bawah ini:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Pada baris satu memuat nol yang terbanyak, karena itu dilakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama

$$= 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ b_3 - 4b_1 \end{matrix}$$

Determinan sub matrik B, pada kolom kedua memuat entri satu dan nol, karena itu dilakukan oleh OBE ketiga antara b_1 dan b_3

$$= 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -15 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Kolom kedua memuat nol terbanyak, lakukan ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua

$$= 2(-1)^{1+3}1.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -15 & 1 \end{vmatrix}$$

Karena perhitungan determinan matrik 2x2, mudah, maka lakukan perhitungan secara langsung

$$= -2(2 - 3(-15))$$

= -94

Latihan:

1. Hitung determinan matrik di bawah ini, menggunakan reduksi baris.

a. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

2. Hitung determinan matrik di bawah ini, menggunakan metode campuran, yaitu gabungan metode reduksi baris dan ekspansi kofaktor.

a. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -7 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

3. Jika diketahui: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -12$, hitunglah

a. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ a+d & b+e & c+f \end{vmatrix}$ e. $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d+2a & e+2b & f+2c \\ -\frac{1}{2}g & -\frac{1}{2}h & -\frac{1}{2}i \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ -a & -b & -c \\ g-2d & h-2e & i-2f \end{vmatrix}$

4. Jika $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 15 & -6 & 5 \\ -5 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ hitunglah:

   a. det(A) d. det(A)det(B) g. det($(AB)^{-1}$)

   b. det(B) e. det($3A^{-1}$) h. det($(AB)^{T}$)

   c. det(AB) f. det(B^{T}) i. det(B^{2})

5. Diketahui matrik A dan B berordo 4x4, det(A)= - 12 dan det(B)=3/4, hitunglah: det($A2BA^{-1}B^{3}B^{-3}$)

C. Aturan Cramer

Definisi: Misalkan $A_{nxn}=[a_{ij}]$, C_{ij} adalah kofaktor dari entri a_{ij}, matrik:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matrik kofaktor. Transpos matrik kofaktor A disebut matrik adjoin A ditulis adj(A).

Contoh:

Tentukan matrik kofaktor A dan matrik adj(A):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$C_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 8$, $C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 23$, $C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6$

$C_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -12$, $C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -16$, $C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9$

$C_{13} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7$, $C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3$, $C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4$

Matrik kofaktor A adalah $\begin{bmatrix} 8 & -12 & -7 \\ 23 & -16 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$, sehingga adj($A$) = $\begin{bmatrix} 8 & 23 & 6 \\ -12 & -16 & -9 \\ -7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Dengan telah terdefinisikannya matrik adjoin, maka didapat cara lain menghitung matrik invers dengan menggunakan matrik adjoin. Untuk itu perlu dihitung jumlah dari perkalian antara entri dan Kofaktor yang tidak seletak.

Pandang dua matrik berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Pandang dua ekspresi berikut ini:

$b_1 = a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33}$

$b_2 = a_{11}C'_{31} + a_{12}C'_{32} + a_{13}C'_{33}$

Karena matrik A dan A' seperti di atas maka, $C_{31}=C'_{31}$, $C_{32}=C'_{32}$, dan $C_{33}=C'_{33}$, akibatnya $b_1=b_2$, sedangkan $b_2=\det(A')$. Dikarenakan matrik A' memuat dua baris yang saling berkelipatan, maka $\det(A')=0$, sehingga $b_1=0$.

Dan dengan melakukan hal yang sama untuk matrik berordo nxn, maka dapat diambil kesimpulan jumlah dari perkalian antara entri dan kofaktor yang tidak seletak adalah nol.

Berikut akan dihitung A adj(A) *(matrik A dikali dengan matrik adjoin A)*:

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}C_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}C_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}C_{nk} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}C_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}C_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}C_{nk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}C_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}C_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}C_{nk} \end{bmatrix}$$

secara umum entri pada matrik di atas dapat ditulis, sebagai berikut:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{jk} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \ldots + a_{in}C_{jn}$$

Jika $i \neq j$, maka seperti hasil di atas didapat $b_{ij}=0$.

Jika $i=j$, maka ekspresi di atas $b_{ij}=\det(A)$.

Sehingga :

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I$$

Sehingga:

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)I,$$

jika $\det(A) \neq 0$, maka didapat:

$$A\,\mathrm{adj}(A)\frac{1}{\det(A)} = I$$

$$A^{-1}A\,\mathrm{adj}(A)\frac{1}{\det(A)} = A^{-1}I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$$

Contoh:

Dengan menggunakan rumus di atas, tentukan A^{-1} dari matrik di bawah ini:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & -2 & 0\\ 4 & 5 & -4\end{bmatrix}$$

Jawab:

Matrik adjoin A sudah dihitung di atas, sehingga cukup dihitung determinan matrik A.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & -2 & 0\\ 4 & 5 & -4\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ b_2+3b_1\\ b_3-4b_1\end{matrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 9\\ 0 & -3 & -16\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}4 & 9\\ -3 & -16\end{vmatrix}=-37$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adj(A)=\frac{1}{-37}\begin{bmatrix}8 & 23 & 6\\ -12 & -16 & -9\\ -7 & 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8/37 & -23/37 & -6/37\\ 12/37 & 16/37 & 9/37\\ 7/37 & -3/37 & -4/37\end{bmatrix}$$

Jika sistem persamaan linier, berbentuk *AX=B*, dengan matrik koefisien mempunyai invers, maka dapat diselesaikan dengan cara, sebagai berikut:

$$X=A^{-1}B$$

$$X=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)B$$

$$X=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1}\\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

$$X=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}b_1C_{11}+b_2C_{21}+\ldots+b_nC_{n1}\\ b_1C_{12}+b_2C_{22}+\ldots+b_nC_{n2}\\ \vdots\\ b_1C_{1n}+b_2C_{2n}+\ldots+b_nC_{nn}\end{bmatrix}$$

Jika $X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$, maka $x_j=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} b_iC_{ij}}{\det(A)}$

Untuk memudahkan mengingatnya, bentuklah matrik *Aj*, yaitu matrik yang diperoleh dari matrik *A* dengan cara mengganti semua entri pada kolom ke-*j* dengan suku konstan B, seperti berikut ini:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat:

$$\det(A_j) = \sum_{i=1}^{n} b_i C_{ij}$$

berarti:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \text{ untuk } j=1, 2, ..., n$$

Aturan pencarian solusi sistem persamaan linier di atas disebut: **aturan Cramer**.

Contoh:

Tentukan x dan z dari Sistem Persamaan Linier di bawah ini, menggunakan aturan Cramer:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & - & z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \end{array}$$

Jawab:

Bentuk persamaan matrik (AX=B) dari sistem persamaan linier di atas, adalah:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\text{A}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} b_1 + 3b_3 \\ b_2 + 2b_3 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 9 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -20$$

Karena yang diminta x, yang dalam sistem persamaan linier dinyatakan sebagai anu yang pertama, maka dibentuk A_x, yaitu matrik A yang semua entri pada kolom pertama diganti suku konstan.

$$\det(A_x)=\begin{vmatrix}4 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}\begin{matrix}b_1+3b_3\\ b_2+2b_3\\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}10 & 0 & 8\\ 5 & 0 & 9\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=(-1)(-1)\begin{vmatrix}10 & 8\\ 5 & 9\end{vmatrix}=50$$

Karena yang diminta z, yang dalam sistem persamaan linier dinyatakan sebagai anu yang ketiga, maka dibentuk A_z, yaitu matrik A yang semua entri pada kolom ketiga diganti suku konstan.

$$\det(A_z)=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}b_1+3b_3\\ b_2+2b_3\\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}4 & 0 & 10\\ 7 & 0 & 5\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=(-1)(-1)\begin{vmatrix}4 & 10\\ 7 & 5\end{vmatrix}=-50$$

$$x=\frac{\det(A_x)}{\det(A)}=\frac{50}{-20}=-2\frac{1}{2}$$

$$z=\frac{\det(A_z)}{\det(A)}=\frac{-50}{-20}=2\frac{1}{2}$$

Latihan:

1. Tentukan matrik kofaktor dan matrik adjoin dari matrik-matrik di bawah ini:

   a. $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ 0 & 2 & -2\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}$

   d. $\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$

   e. $\begin{bmatrix}2 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$

2. Tentukan invers matrik di bawah ini, menggunakan metode yang dijelaskan dalam sub bab ini.

   a. $\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Untuk no. 3 sampai dengan 6, gunakan Aturan Cramer.

3. Tentukan x, dan y, dari sistem persamaan linier berikut:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & + & 3z & = & 1 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

4. Tentukan x, y, dan z dari persamaan matrik berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

5. Tentukan solusi persamaan matrik:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 7 & 2 & 9 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 \\ 14 \\ 11 \\ -4 \end{bmatrix}$$

6. Tentukan α, β, dan γ, dari sistem persamaan linier berikut:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\sin\alpha & - & \cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 3 \\ 4\sin\alpha & + & 2\cos\beta & - & 2\tan\gamma & = & 2 \\ 6\sin\alpha & - & 3\cos\beta & + & \tan\gamma & = & 9 \end{array}$$

7. Gunakan aturan Cramer untuk menentukan x, y, z dan w dari sistem persamaan linier berikut:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + 3w = 2 \\ 4x + 5y + 2w = 0 \\ 3x + 2y + 4z - 3w = -5 \\ 6y + 2z + w = 4 \end{cases}$$

8. Tentukan λ, sehingga matrik A menjadi matrik singular:

a. $A = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

9. Tanpa menghitung determinan secara langsung, tunjukkan bahwa

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$$

10. Matrik yang berbentuk A= $\begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & g \\ 0 & 0 & f & h \end{bmatrix}$ disebut sebagai matrik blok diagonal, karena matrik tersebut dapat dibentuk oleh blok-blok sub matrik yang memenuhi pola diagonal. Jika B= $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ dan C= $\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix}$, tunjukkan bahwa det(A) = det(B).det(C).

RUANG VEKTOR

A. Ruang-n Euclides

Konsep generalisasi dari vektor R^2 atau R^3 dikembangkan pada sub bab ini. Seperti yang telah diketahui sebuah vektor di R^2 dinyatakan oleh sepasang bilangan terurut $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$, begitupun vektor di R^3 dinyatakan tiga bilangan terurut $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$. Permasalahan mulai timbul setelah R^3, apakah perlu dikembangkan R^4, dan bagaimana visualisasinya. Jawabnya tentu perlu dikembangkan ke R^4, R^5, bahkan sampai R^n. Hal ini dapat dilihat pada Sistem Persamaan Linier yang telah dibicarakan pada sub bab sebelumnya, yang ternyata permasalahan vektor bukan hanya sampai R^3, melainkan sampai R^n. Masalah visualisasi tidak dapat dilaksanakan, karena dunia ini hanya disusun oleh konsep tiga dimensi.

Definisi: Sebuah vektor di R^n, dinyatakan oleh n bilangan terurut, yaitu $\mathbf{u}=(u_1, u_2, ..., u_n)$

Pada R^2 atau R^3, sebuah urutan bilangan di atas bermakna, yaitu sebagai titik atau sebagai vektor. Dalam R^n, keduanya dianggap sama, sehingga R^n merupakan generalisasi titik sekaligus generalisasi vektor.

Vektor nol: yaitu vektor yang semua entri-nya nol, misalkan $\mathbf{o}=(0, 0, ..., 0)$

Misalkan $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in R^n$, dua vektor disebut **sama**, atau $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, jika dan hanya jika $u_1=v_1$, $u_2=v_2$, ..., $u_n=v_n$ {*semua entri yang seletak sama*}

Operasi-operasi pada vektor di R^n

1. Penjumlahan

Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$, didefinisikan :

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, ..., u_n+v_n)$ {*entri yang seletak dijumlahkan*}

Contoh:

Misalkan $\mathbf{u}=(2, -1, 9, 3, 4)$, $\mathbf{v}=(1, -2, 3, -2, 1, 0)$, $\mathbf{w}=(5, -8, 2, 3, 4, 5)$

$\mathbf{u} + \mathbf{v}$ = tidak terdefinisi, karena $\mathbf{u} \in R^5$, sedangkan $\mathbf{v} \in R^6$

$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1+5, (-2)+(-8), 3+2, (-2)+3, 1+4, 0+5)=(6, -10, 5, 1, 5, 5)$

2. Perkalian dengan skalar

Misalkan $\mathbf{u} \in R^n$, k skalar, didefinisikan :

$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, ..., ku_n)$ {*setiap entri dikalikan dengan skalar*}

Contoh:

Misalkan $\mathbf{u}=(2, -1, 9, 3, 4)$,

$-3\mathbf{u}=(-6, 3, -27, -9, -12)$

Akibat dari didefinisikannya perkalian dengan skalar, maka didapatlah operasi pengurangan, yaitu:

$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$

Sifat-sifat penjumlahan dan perkalian dengan skalar

Misalkan **u**, **v**, **w** $\in R^n$, *k, l* skalar, berlaku:

a. **u** + **v** = **v** + **u** {*komutatif*}
b. (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**) {*asosiatif*}
c. **u** + **o** = **o** + **u** = **u** {*anggota identitas*}
d. **u** + (-**u**) = (-**u**) + **u** = **o** {*invers anggota*}
e. *k*(**u** + **v**) = *k***u** + *k***v** {*distributif terhadap skalar*}
f. (*k*+*l*)**u** = *k***u** + *l***u** {*distributif terhadap skalar*}
g. (*kl*)**u** = *k*(*l***u**) {*asosiatif perkalian dengan skalar*}
h. 1.**u** = **u** {*perkalian dengan skalar 1 (satu)*}

Kedelapan sifat di atas nantinya akan diambil sebagai sebuah kebenaran (aksioma) dan ditambah dengan dua aksioma ketertutupan dipakai untuk mendefinisikan ruang vektor.

3. Hasil Kali Titik (hasil kali dalam Euclides)

Misalkan **u**, **v** $\in R^n$, didefinisikan :

u • **v** $= u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n$ {*jumlah dari semua hasil kali entri yang seletak*}

Contoh:

Misalkan **u**=(2, -1, 9, 3, 4), **v**=(1, -2, 3, -2, 1, 0), **w**=(5, -8, 2, 3, 4, 5)

u • **v** = tidak terdefinisi, karena **u** $\in R^5$, sedangkan **v**$\in R^6$

v • **w** = 1.5 + (-2).(-8) + 3.2 + (-2).3 + 1.4 + 0.5= 5 + 16 + 6 – 6 + 4 + 0 = 25

Sifat hasil kali titik.

Misalkan **u**, **v**, **w** $\in R^n$, *k* skalar, berlaku:

a. **u** • **v** = **v** • **u** {*komutatif*}
b. **u** • (**v** + **w**) = **u** • **v** + **u** • **w**) {*distributif*}
c. *k*(**u** • **v**) = (*k***u**) • **v**= **u** • (*k***v**) {*kehomogenan*}
d. **u** • **u** > 0, jika **u**≠**o**, dan **u** • **u** = 0, jika **u** = **o** {*kepositifan*}

Keempat sifat di atas nantinya akan diambil sebagai kebenaran (aksioma) untuk membentuk definisi hasil kali dalam.

4. Norm/ Besar/ Panjang Vektor

Dari sifat d, dijamin bahwa hasil kali titik antara vektor dengan vektor itu sendiri tak negatif, karena itu dapat digunakan untuk mendefinisikan norm/ panjang vektor.

Misalkan **u**$\in R^n$ didefinisikan :

7u7 = (**u** • **u**)$^{1/2}$ {*akar dari hasil kali titik dengan dirinya sendiri*}

Contoh:

Misalkan **u**=(2, -4, 9, -2, 4), maka

7u7=(2.2 + (-4).(-4) + 9.9 + (-2).(-2) + 4.4)$^{1/2}$ = (4 + 16 + 81 + 4 + 16)$^{1/2}$ = 11

5. Sudut antara dua vektor

Secara geometri kita tak mampu menggambarkan (memvisualisasikan) vektor R^n, karena itu sudut diantara dua vektor pun, bukanlah sudut dalam makna yang dapat digambarkan demikian itu. Melainkan sudut dalam makna yang di dalam ide saja.

Misalkan **u**, **v** $\in R^n$, didefinisikan sudut diantara vektor **u** dan **v**, dinyatakan sebagai cosinusnya:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\text{, jika } \mathbf{u}\neq\mathbf{o} \text{ dan } \mathbf{v}\neq\mathbf{o}$$

Contoh:

Misalkan **u**=(2, -1, 9, 3, 4) dan **v**=(1, -2, 3, -2, 1)

$$\cos\,\theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{2+2+27-6+1}{\sqrt{4+1+81+9+16}\sqrt{1+4+9+4+1}} = \frac{26}{\sqrt{111}\sqrt{19}} = \frac{26}{\sqrt{2109}}$$

6. Jarak antara dua vektor

Hasil lain dari sifat d, dapat digunakan mendefinisikan jarak antara dua vektor.

Misalkan **u**, **v**$\in R^n$ didefinisikan :

d(**u, v**)=7**u** - **v**7 = ((**u** -**v**)• (**u** -**v**))$^{1/2}$ {*norm dari* **u** *dikurang* **v**}

Contoh:

Misalkan **u**=(2, -4, 9, -2, 4) dan **v**=(1, -2, 0, 2, 3), maka

d(**u, v**)=7**u** - **v**7= 7(1, -2, 9, -4, 1)7=(1.1 + (-2).(-2) + 9.9 + (-4).(-4) + 1.1)$^{1/2}$ = (103)$^{1/2}$

Himpunan dari semua vektor di R^n, yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan, perkalian dengan skalar, dan hasil kali titik yang telah didefinisikan di atas disebut ruang n Euclides.

Proyeksi Ortogonal

Misalkan **u**, **v**$\in R^n$, maka proyeksi ortogonal **u** pada **v** adalah:

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}\,\mathbf{v}$$

komponen **u** yang ortogonal pada **v** = **u** - proy$_{\mathbf{v}}$**u**

Latihan:

1. Misalkan **u**=(0, -1, 2, 3, 4), **v**=(1, 2, -3, 2, 1), **w**=(4, 2, 1, -3, 2), hitunglah:
   a. **u** + (**v** + **w**)
   b. 2**u** + 3**v**
   c. –3**u** + 2**v**
   d. **u** + (2**v** – **w**)
   e. (3**v** + 2**u**) **-** 6**w**

2. Jika **u**, **v**, dan **w** pada soal no. 1, hitunglah:
   a. 7**u**7+7**v**7
   b. 7-2**u**7+73**v**7
   c. 7**u**+2**v**7+7-4**w**7
   d. 7**u** + 2**v** **-** **w**7
   e. d(**v**, **w**)
   f. d(**u** + **v**, **w**)
   g. cosinus sudut antara **u** dan **w**
   h. cosinus sudut antara **u** + **v** dan **w**

3. Jika **u**, **v**, dan **w** pada soal no. 1, hitunglah:
    a. $\text{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$
    b. $\text{proy}_{\mathbf{w}}\mathbf{u}$
    c. komponen **w** yang ortogonal pada **u**.
    d. 7$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$7
    e. komponen **u** yang ortogonal pada **v**.

4. Tentukan a, b, dan c, sehingga **u** = (a, -1, 0, 1) ortogonal pada **v**=(3, b, 1, -1), dan **w**=(1, 1, -1, c), begitupun **v** ortogonal pada **w**.
5. Tentukan k, sehingga sudut antara **u** = (1, 1, -1, 1) dan **v** = (k, 1, 2k, 0) sebesar π/3.

B. Ruang Vektor

Seperti yang telah dinyatakan sebelumnya dengan melihat bahwa vektor R^n dan matrik M_{nxm} yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar mempunyai sifat yang sama, kenyataan ini mendorong didefinisikannya ruang vektor berikut:

Definisi: Misalkan V himpunan yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar (dalam hal ini skalar adalah bilangan riil). V disebut **ruang vektor**, jika memenuhi sepuluh aksioma berikut:
1. Untuk setiap **u**, **v**∈ V, berlaku **u** + **v**∈ V {*tertutup penjumlahan*}
2. Untuk setiap **u**, **v**∈ V, berlaku **u** + **v** = **v** + **u** {*komutatif*}
3. Untuk setiap **u**, **v**, **w**∈ V, berlaku (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**) {*asosiatif*}
4. Ada **o** ∈ V, dan berlaku **u** + **o** = **o** + **u** = **u**, untuk setiap **u** ∈ V {*anggota identitas*}
5. Untuk setiap **u** ∈ V, ada -**u** ∈ V, dan berlaku **u** + (-**u**) = (-**u**) + **u** = **o** {*anggota invers*}
6. Untuk setiap **u**∈ V dan setiap *k* ∈ R, berlaku *k***u** ∈ V {*tertutup perkalian skalar*}
7. Untuk setiap **u**, **v**∈ V dan setiap *k* ∈ R, berlaku *k*(**u** + **v**) = *k***u** + *k***v** {*distributif skalar*}
8. Untuk setiap **u**∈ V dan setiap *k*, *l* ∈ R, berlaku (*k*+*l*)**u** = *k***u** + *l***u** {*distributif skalar*}
9. Untuk setiap **u**∈ V dan setiap *k*, *l* ∈ R, berlaku (*kl*)**u** = *k*(*l***u**) {*asosiatif skalar*}
10. Untuk setiap **u**∈ V, berlaku 1.**u** = **u** {*perkalian dengan skalar* 1}

Anggota ruang vektor disebut **vektor**.

Dengan definisi ruang vektor yang demikian ini, maka istilah "vektor" menjadi sangat luas, sebuah matrik ataupun fungsi menjadi vektor juga, sepanjang sehimpunan matrik atau fungsi yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar, memenuhi kesepuluh aksioma di atas.

Contoh:
Tentunya dikarenakan kesepuluh aksioma tersebut diambil dari vektor R^n dan matrik M_{nxm} yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang biasa (standar), maka R^n dan matrik M_{nxm} adalah ruang vektor

Contoh yang lain:
Himpunan semua polinom berderajat maksimal n yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang biasa yang dilambangkan dengan P_n.

Bentuk umum polinom adalah: $a_0+a_1x + a_2x^2+ ...+a_nx^n$, dimana a_0, a_1, a_2, ...,a_n konstanta riil, dan $a_n\neq 0$, disebut polinom berderajat n.

Operasi yang biasa pada polinom:
Misalkan **p**= $a_0+a_1x + a_2x^2+ ...+a_nx^n$, **q**= $b_0+b_1x + b_2x^2+ ...+b_nx^n$.
p + **q** = $(a_0+ b_0)+(a_1+ b_1)x + (a_2+ b_2)x^2+ ...+(a_n+b_n)x^n$
{*koefisien yang seletak dijumlahkan*}
*k***p**= $ka_0+ka_1x + ka_2x^2+ ...+ka_nx^n$ {*setiap koefisien dikalikan k*}

Contoh:
p = $1 + 2x – 3x^2 – x^3 + 2x^4$
q = $5 + 4x^2 + 2x^3 – 2x^4$
p + **q** = $6 + 2x + x^2 + x^3$
-3**p** = $-3 – 6x + 9x^2 + 3x^3 – 6x^4$

Bukti: (*bahwa P_n ruang vektor*)

1. Ambil **p**, **q** $\in$ Pn, berarti dapat diuraikan sebagai : **p**=$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$,
   q=$b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n$
   p+**q**=$(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)+(b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n)$ {*sifat asosiatif bilangan riil*}
   p+**q**=$(a_0+ b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+...+(a_n+b_n)x^n$ {a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, ..., a_n+b_n *konstanta riil*}
   $\therefore$ **p**+**q** $\in P_n$

2. Ambil **p**, **q** $\in$ Pn, berarti dapat diuraikan sebagai : **p**=$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$,
   q=$b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n$ **p**+**q**=$(a_0+ b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+...+(a_n+b_n)x^n$
   {*sifat asosiatif bilangan riil*}
   p+**q**=$(b_0+a_0)+(b_1+a_1)x+(b_2+a_2)x^2+...+(b_n+a_n)x^n$ {*sifat distributif bilangan riil*}
   p+**q**=$b_0+a_0+b_1x+a_1x+b_2x^2+a_2x^2+...+b_nx^n+a_nx^n$ {*sifat asosiatif bilangan riil*}
   p+**q**=$(b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n)+ (a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)$
   $\therefore$ **p**+**q**=**q**+**p**

3. Ambil **p**,**q**,**r**$\in P_n$, berarti dapat diuraikan sebagai: **p**=$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$,
   q=$b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n$,
   r = $c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_nx^n$
   (**p**+**q**)+**r**=$((a_0+ b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+...+(a_n+b_n)x^n)+(c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_nx^n)$
   {*distributif bil. riil*}
   (**p**+**q**)+**r**= $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+ b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n+ c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_nx^n$
   {*asosiatif bil. riil*}
   (**p**+**q**)+**r**= $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+(b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n+ c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_nx^n)$
   {*distributif bil. riil*}
   (**p**+**q**)+**r**= $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+((b_0+c_0)+(b_1+c_1)x +(b_2+c_2)x^2+...+(b_n+cn)x^n)$
   $\therefore$(**p**+**q**)+**r**=**p**+(**q**+**r**)

4. Ada **o**$\in P_n$, yaitu **o**=0, dan ambil **q** $\in P_n$, berarti dapat diuraikan sebagai : **q**=$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$,
   o+**q**=$0+a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n = a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$=**q**
   q+**o**= $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+0= a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$=**q**
   $\therefore$**q**+**o**= **o**+**q**=**q**

5. Ambil $\mathbf{p} \in P_n$, berarti dapat diuraikan sebagai : $\mathbf{p}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, ada $-\mathbf{p} \in P_n$, yaitu
   $-\mathbf{p}=(-1)(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)=-a_0-a_1x-a_2x^2-...-a_nx^n$
   $\mathbf{p}+(-\mathbf{p})=(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)+(-a_0-a_1x-a_2x^2-...-a_nx^n)$
   {*asosiatif dan distributif bil. riil*}
   $\mathbf{p}+(-\mathbf{p})=(a_0-a_0)+(a_1-a_1)x+(a_2-a_2)x^2+...+(a_n-a_n)x^n=0=\mathbf{o}$
   $-\mathbf{p}+\mathbf{p}=(-a_0-a_1x-a_2x^2-...-a_nx^n)+(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)$
   {*asosiatif dan distributif bil. riil*}
   $-\mathbf{p}+\mathbf{p}=(-a_0+a_0)+(-a_1+a_1)x+(-a_2+a_2)x^2+...+(-a_n+a_n)x^n=0=\mathbf{o}$
   $\therefore \mathbf{p}+(-\mathbf{p})=-\mathbf{p}+\mathbf{p}=\mathbf{o}$
6. Ambil $\mathbf{p} \in P_n$, berarti dapat diuraikan sebagai : $\mathbf{p}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ ambil $k \in R$, maka
   $k\mathbf{p}=k(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)= ka_0+ka_1x+ka_2x^2+...+ka_nx^n$,
   karena $ka_0, ka_1, ka_2, ..., ka_n \in R$, maka
   $\therefore k\mathbf{p} \in P_n$

7. Ambil $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in P_n$, berarti dapat diuraikan sebagai : $\mathbf{p}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, $\mathbf{q}=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n$
   ambil $k \in R$, maka
   $k(\mathbf{p}+\mathbf{q})= k((a_0+ b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+...+(a_n+b_n)x^n)$ {*distributif bil. riil*}
   $k(\mathbf{p}+\mathbf{q})=k(a_0+ b_0)+k(a_1+b_1)x+k(a_2+b_2)x^2+...+k(a_n+b_n)x^n$ {*distributif bil. riil*}
   $k(\mathbf{p}+\mathbf{q})=(ka_0+kb_0)+(ka_1+kb_1)x+(ka_2+kb_2)x^2+...+(ka_n+kb_n)x^n$ {*distributif bil. riil*}
   $k(\mathbf{p}+\mathbf{q})=ka_0+kb_0+ka_1x+kb_1x+ka_2x^2+kb_2x^2+...+ka_nx^n+kb_nx^n$ {*asosiatif bil. riil*}
   $k(\mathbf{p}+\mathbf{q})=(ka_0+ka_1x+ka_2x^2+...+ka_nx^n)+(kb_0+ kb_1x+ kb_2x^2+...+kb_nx^n)$
   {*distributif bil. riil*}
   $k(\mathbf{p}+\mathbf{q})=k(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)+k(b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n)$
   $\therefore k(\mathbf{p}+\mathbf{q})=k\mathbf{p}+k\mathbf{q}$

8. Ambil $\mathbf{p} \in P_n$, berarti dapat diuraikan sebagai : $\mathbf{p}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, $k, l \in R$,
   $(k+l)\mathbf{p}=(k+l)(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)$ {*distributif bil. riil*}
   $(k+l)\mathbf{p}=(k+l)a_0+(k+l)a_1x+(k+l)a_2x^2+...+(k+l)a_nx^n$ {*distributif bil. riil*}
   $(k+l)\mathbf{p}=ka_0+la_0+ka_1x+la_1x+ka_2x^2+la_2x^2+...+ka_nx^n+la_nx^n$ {*asosiatif bil. riil*}
   $(k+l)\mathbf{p}=(ka_0+ka_1x+ka_2x^2+...+ka_nx^n)+(la_0+ la_1x+la_2x^2+...+la_nx^n)$ {*distributif bil. riil*}
   $(k+l)\mathbf{p}=k(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)+ l(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)$
   $\therefore (k+l)\mathbf{p}=k\mathbf{p}+ l\mathbf{p}$

9. Ambil $\mathbf{p} \in P_n$, berarti dapat diuraikan sebagai : $\mathbf{p}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, $k, l \in R$,
   $(kl)\mathbf{p}=(kl)(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)$ {*distributif bil. riil*}
   $(kl)\mathbf{p}=(kl)a_0+(kl)a_1x+(kl)a_2x^2+...+(kl)a_nx^n$ {*asosiatif bil. riil*}
   $(kl)\mathbf{p}=k(la_0)+k(la_1)x+k(la_2)x^2+...+k(la_n)x^n$ {*distributif bil. riil*}
   $(kl)\mathbf{p}=k(la_0+la_1x+la_2x^2+...+la_nx^n)$
   $\therefore (kl)\mathbf{p}=k(l\mathbf{p})$

10. Ambil $\mathbf{p} \in P_n$, berarti dapat diuraikan sebagai : $\mathbf{p}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$,
   $1.\mathbf{p} =1.(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)$ {*sifat bilangan riil dikali satu*}
   $1.\mathbf{p}= a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$

$\therefore 1.\mathbf{p}=\mathbf{p}$

$\therefore$ P_n ruang vektor

Contoh: (*himpunan vektor nol*)

O={**o**} yang dilengkapi dengan penjumlahan dan perkalian skalar yang biasa, termasuk ruang vektor, karena memenuhi sepuluh aksioma ruang vektor.

1. $\mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o} \in O$.
2. $\mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$
3. $(\mathbf{o} + \mathbf{o}) + \mathbf{o} = \mathbf{o} + (\mathbf{o} + \mathbf{o}) = \mathbf{o}$
4. ada $\mathbf{o} \in O$, yang bersifat $\mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$
5. jika $\mathbf{o} \in O$, maka selalu ada $-\mathbf{o}=\mathbf{o} \in O$, sehingga $\mathbf{o} + (-\mathbf{o}) = -\mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$
6. $k\mathbf{o}=\mathbf{o} \in O$
7. $k(\mathbf{o} + \mathbf{o}) = k\mathbf{o} + k\mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$
8. $(k+l)\mathbf{o}=k\mathbf{o} + l\mathbf{o} = \mathbf{o}$
9. $(kl)\mathbf{o} = k(l\mathbf{o})= \mathbf{o}$
10. $1.\mathbf{o} = \mathbf{o}$

Contoh: (*vektor di bidang yang melalui titik asal*)

Persamaan bidang yang melalui titik asal adalah: ax + by + cz = 0.

Himpunan semua vektor R^3 di bidang yang melalui titik asal dinyatakan oleh: P = {(x, y, z) $\in R^3 \mid$ ax + by + cz = 0} yang dilengkapi dengan penjumlahan dan perkalian skalar yang biasa di R^3, merupakan ruang vektor.

1. Ambil $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3) \in P$, berarti memenuhi: $au_1+bu_2+cu_3=0$ dan $av_1+bv_2+cv_3=0$, jumlah dari kedua persamaan ini, didapat: $(au_1+bu_2+cu_3)+(av_1+bv_2+cv_3)=0$ atau $a(u_1+v_1)+b(u_2+v_2) +c(u_3+ v_3)=0$, yang berarti $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in P$
2. Ambil $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3) \in P$, dan karena **u**, **v** juga anggota R^3, maka terpenuhilah aksioma ke 2.
3. Ambil $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w}=(w_1, w_2, w_3) \in P$, begitu pula **u**, **v**, dan **w** juga anggota R^3, sehingga dipenuhi aksioma yang ke 3.
4. Ada $\mathbf{o} =(0, 0, 0) \in P$, karena a.0+b.0+c.0=0, dan karena **o** juga anggota R^3, maka memenuhi aksioma ke 4.
5. Ambil $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3) \in P$, ada $-\mathbf{u}=(-u_1, -u_2, -u_3) \in P$, karena $a(-u_1)+b(-u_2)+c(-u_3)=-(au_1+bu_2 + cu_3) = -0=0$. Dan dikarenakan **u** dan –**u** ini juga anggota R^3, maka dipenuhi aksioma yang ke 5.
6. Ambil $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3) \in P$, akan ditunjukkan bahwa $k\mathbf{u} \in P$, berarti akan diperlihatkan (ku_1, ku_2, ku_3) memenuhi persamaan bidang, $a(ku_1)+b(ku_2)+c(ku_3)=k(au_1+bu_2+cu_3)=k.0=0$
7. Ambil $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3) \in P$, ambil *k* skalar, karena **u**, **v** juga anggota R^3, dan *k* skalar riil, maka dipenuhi aksioma ke 7.
8. Ambil $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3) \in P$, ambil *k*, *l* skalar, karena **u** juga anggota R^3, dan *k*, *l* skalar riil, maka dipenuhi aksioma ke 8.
9. Ambil $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3) \in P$, ambil *k*, *l* skalar, karena **u** juga anggota R^3, dan *k*, *l* skalar riil, maka dipenuhi aksioma ke 9.
10. Ambil $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3) \in P$, $1.\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Contoh: (*bukan ruang vektor*)

Jika M= $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathrm{R} \right\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan yang biasa di matrik 2x2 dan perkalian dengan skalar yang biasa di matrik 2x2. Dari definisi M ini, terlihat ketidakbiasaan dibanding himpunan matrik 2x2, adalah entri pada baris pertama kolom pertama yang harus 1. M **bukan ruang vektor**, karena tidak terpenuhi aksioma ketertutupan terhadap operasi penjumlahan. Berikut diberikan **contoh penyangkal** (contoh yang tidak memenuhi aksioma), **u**= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ dan **v**= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, maka **u** + **v** = $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \notin$ M, karena entri baris pertama kolom pertama bukan 1 (satu), seperti pada M, yang mensyaratkannya.

Contoh: (*bukan ruang vektor*)

Jika V himpunan semua vektor di R^3, dengan operasi penjumlahan **u**+**v**=(u_1+v_2, u_2+v_1, u_3+v_3), sedangkan perkalian dengan skalar *k*u=(*k*u_1, *k*u_2, *k*u_3). Dari definisi V, terlihat yang tidak biasa adalah operasi penjumlahan pada entri pertama dan kedua, secara intuisi kemungkinan kegagalan aksioma ruang vektor adalah disini, karena itu dicari contoh penyangkal yang sesuai.

Contoh penyangkal: **a**=(2, 3, -1) dan **b**=(4, 2, 4).

a+**b**=(2+2, 3+4, (-1)+4)=(4, 7, 3)

b+a=(4+3, 2+2, (-1)+4)=(7, 4, 3)

Karena **a**+**b**≠**b+a**, berarti tidak memenuhi aksioma ke 2, yaitu aksioma komutatif.

Latihan:

Untuk masing-masing soal di bawah ini, tunjukkan ruang vektor atau jika bukan ruang vektor berikan contoh penyangkalnya.

1. Misalkan V himpunan semua vektor di R^3 dengan operasi yang didefinisikan sebagai: untuk **u**=(u_1, u_2, u_3) dan **v**=(v_1, v_2, v_3), maka **u**+**v**=(u_1+v_1, u_2+2v_2, u_3+v_3), sedangkan *k***u**=(*k*u_1, *k*u_2, *k*u_3).
2. Misalkan V himpunan semua vektor di R^3 dengan operasi yang didefinisikan sebagai: untuk **u**=(u_1, u_2, u_3) dan **v**=(v_1, v_2, v_3), maka **u**+**v**=(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3), sedangkan *k***u**=(u_1, u_2, *k*u_3).
3. Misalkan M himpunan semua matrik berordo 2x2 dengan operasi yang didefiniskan sebagai: untuk $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{f} \\ \mathrm{g} & \mathrm{h} \end{bmatrix}$, maka $\mathbf{m} + \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathrm{a+e} & \mathrm{b+f} \\ \mathrm{c+g} & \mathrm{d+h} \end{bmatrix}$ dan $k\mathbf{m} = \begin{bmatrix} k\mathrm{a} & k\mathrm{b} \\ k\mathrm{c} & 0 \end{bmatrix}$
4. Misalkan V himpunan vektor di R^3, yang mempunyai bentuk **u**=(u_1, u_2, u_3), dengan syarat 2u_1 + u_2 + u_3 = 0, dengan kedua operasi yang biasa di vektor R^3.
5. Misalkan V himpunan polinom di P_2, yang mempunyai bentuk **u**=a_0+a_1x+$a_2$$x^2$, dengan syarat a_0+a_1= 0, dengan kedua operasi yang biasa di vektor P_2.
6. Misalkan V himpunan vektor di R^3, yang mempunyai bentuk **u**=(u_1, u_2, u_3), dengan syarat u_1 + u_2 + u_3 = 2, dengan kedua operasi yang biasa di vektor R^3.

7. Misalkan P himpunan semua matrik berordo 2x2, dengan bentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan syarat a+b=0 dan c+2d=0, sedangkan kedua operasi yang biasa pada matrik 2x2.
8. Misalkan P himpunan semua matrik berordo 2x2, dengan bentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan syarat ad=0, sedangkan kedua operasi yang biasa pada matrik 2x2.
9. Misalkan V himpunan polinom di P_2, yang mempunyai operasi penjumlahan untuk $\mathbf{u}=a_0+a_1x+a_2x^2$, dan $\mathbf{v}=b_0+b_1x+b_2x^2$ didefinisikan $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(a_0+b_0+1)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2$, dan perkalian skalar yang biasa di vektor P_2.
10. Misalkan V himpunan semua solusi sistem persamaan linier homogen, AX=O, dengan A berordo nxn, dengan operasi yang biasa pada R^n.

C. Sub Ruang

Definisi: Misalkan V ruang vektor. $U \subseteq V$ dan $U \neq \emptyset$.
U disebut **sub ruang** dari V jika U ruang vektor dibawah operasi yang sama dengan di V.

Contoh:
Ruang nol, yang merupakan himpunan bagian dari ruang vektor yang lain.

Kenyataan bahwa setiap anggota U juga anggota V menyebabkan aksioma (2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10) yang dipenuhi di V juga dipenuhi di U dan juga dikarenakan U ruang vektor maka dapatlah dipenuhi aksioma ketertutupan terhadap penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Dari kenyataan ini didapat kesimpulan:

Teorema:
Misalkan V ruang vektor. $U \subseteq V$, dan $U \neq \emptyset$.
U sub ruang dari V jika dan hanya jika dipenuhi dua aksioma:
1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$, maka $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in U$
2. $\forall \mathbf{u} \in U, \forall k \in R$ maka $k\mathbf{u} \in U$

Kedua aksioma di atas ekivalen dengan mengatakan:
3. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$, dan $\forall k, l \in R$, maka $k\mathbf{u} + l\mathbf{v} \in U$.

Contoh:
Misalkan U himpunan semua matrik 2x2 yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan syarat a=0, dan d=0. Tunjukkan bahwa U merupakan sub ruang dari ruang vektor matrik 2x2, di bawah operasi yang biasa di matrik 2x2.

Jawab:
1. Ambil $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$, akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in U$, karena $\mathbf{a} \in U$, maka dipenuhi $\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ dengan syarat $a_1=0$ dan $d_1=0$, dan dikarenakan $\mathbf{b} \in U$, maka dipenuhi

b=$\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ dengan syarat $a_2=0$ dan $d_2=0$. Maka **a**+**b**=$\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$, karena $a_1=0$ dan $a_2=0$, maka $a_1+a_2=0$, serta dikarenakan $d_1=0$ dan $d_2=0$, maka $d_1+d_2=0$. Jadi **a**+**b**$\in$U.

2. Ambil **a**$\in$U, ambil $k\in$R akan ditunjukkan bahwa k**a**$\in$U, karena **a**$\in$U, maka dipenuhi **a**=$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ dengan syarat $a_1=0$ dan $d_1=0$. Maka k**a**=$\begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix}$, berarti $ka_1=0$ dan $kd_1=0$. Jadi, k**a**$\in$U.

$\therefore$U sub ruang dari ruang vektor matrik 2x2.

Contoh:
Misalkan U himpunan semua solusi sistem persamaan linier homogen AX=O, dengan A berordo nxn dan tetap. Tunjukkan bahwa U sub ruang R^n.

Jawab:
1. Ada vektor nol, O, sehingga AO = O. Jadi, U$\neq\varnothing$.
2. Ambil X_1, $X_2\in$U, berarti memenuhi $AX_1=O$ dan $AX_2=O$. Akan ditunjukkan bahwa $X_1+X_2\in$U, berarti $A(X_1+X_2)=O$.
   $A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2$ {*sifat distributif perkalian matrik*}
   $A(X_1+X_2)=O+O=O$ {*karena $AX_1=O$ dan $AX_2=O$*}
   Jadi, $X_1+X_2\in$U

3. Ambil $X_1\in$U, berarti memenuhi $AX_1=O$. Akan ditunjukkan $kX_1\in$U, berarti $A(kX_1)=O$.
   $A(kX_1)=k(AX_1)$ {*sifat asosiatif perkalian matrik*}
   $A(kX_1)=kO=O$ {*karena $AX_1=O$*}
   Jadi, $kX_1\in$U

$\therefore$U sub ruang dari ruang vektor R^n.

Contoh: {*bukan sub ruang*}
Misalkan U himpunan semua matrik 2x2, berbentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan syarat ad=0. Apakah U sub ruang dari ruang vektor matrik 2x2?

Jawab:
U bukan sub ruang dari matrik 2x2, karena itu dibutuhkan contoh penyangkal.
$\mathbf{m}_1=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\in$U dan $\mathbf{m}_2=\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}\in$U, tetapi $\mathbf{m}_1+\mathbf{m}_2=\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\notin$U.
Jadi, U bukan sub ruang dari matrik 2x2.

Latihan:
Untuk masing-masing soal di bawah ini, tunjukkan sub ruang dari ruang vektor yang sesuai atau berikan contoh penyangkal yang menyatakan bukan sub ruang.

1. Misalkan U himpunan semua vektor di R^3, yang mempunyai bentuk $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$, dengan syarat $u_2+u_3=0$.
2. Misalkan U himpunan semua vektor di R^3, yang mempunyai bentuk $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$, dengan syarat $u_1u_3=0$.
3. Misalkan P himpunan semua matrik berordo 2x2, dengan bentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan syarat a+b=c dan a-b=d.
4. Misalkan P himpunan semua matrik berordo 2x2, dengan bentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan syarat a+b=0 dan c-d=0.
5. Misalkan U himpunan semua polinom di P_2, yang mempunyai bentuk $\mathbf{u}=a_0+a_1x+a_2x^2$, dengan syarat $a_0+a_1= a_2$.
6. Misalkan U himpunan semua polinom di P_2, yang mempunyai bentuk $\mathbf{u}=a_0+a_1x+a_2x^2$, dengan syarat $a_0a_1= a_2$.
7. Misalkan P himpunan semua matrik berordo 2x2, dengan bentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan syarat a+b=c+d.
8. Misalkan U himpunan semua vektor di R^n yang memenuhi sistem persamaan linier AX=B, dengan A berordo nxn dan merupakan matrik yang tetap, begitupun B berordo nx1 dan merupakan matrik yang tetap.
9. Misalkan U himpunan semua polinom di P_2, yang mempunyai bentuk $\mathbf{u}=a_0+a_1x+a_2x^2$, dengan syarat $a_0+a_1=0$ dan $a_1 - a_2=0$.
10. Misalkan P himpunan semua matrik berordo 2x2, dengan bentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan syarat ad - bc=0.

D. Kombinasi Linier

Definisi: Misalkan V ruang vektor. $S=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}\subseteq V$. Misalkan pula $\mathbf{a}\in V$. Vektor **a** disebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari S, jika terdapat skalar-skalar (konstanta riil) $k_1, k_2, ..., k_n$, sehingga memenuhi persamaan:

$$k_1\mathbf{u}_1+ k_2\, \mathbf{u}_2+ ...+ k_n\mathbf{u}_n=\mathbf{a}$$

Contoh:
$B=\{\mathbf{e}_1=(1, 0, 0), \mathbf{e}_2=(0, 1, 0), \mathbf{e}_3=(0, 0, 1)\}$ dan $\mathbf{u}=(a, b, c)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari B, karena $\mathbf{u}=(a, b, c)=a\mathbf{e}_1+b\mathbf{e}_2+c\mathbf{e}_3$

Contoh:
Tunjukkan $\mathbf{u}=(2, 3, -1)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $W=\{\mathbf{a}_1=(1, 0, 1), \mathbf{a}_2=(0, 1, -1), \mathbf{a}_3=(1, 1, -1)\}$.

Jawab:
Akan dicari skalar-skalar k_1, k_2, dan k_3 yang memenuhi: $\mathbf{u}= k_1\mathbf{a}_1+ k_2\mathbf{a}_2+ k_3\mathbf{a}_3$.
$(2, 3, -1)= k_1(1, 0, 1)+ k_2(0, 1, -1)+ k_3(1, 1, -1)$
$(2, 3, -1)=(k_1, 0, k_1)+ (0, k_2, -k_2)+ (k_3, k_3, - k_3)$
$(2, 3, -1)=(k_1+ k_3, k_2+ k_3, k_1-k_2-k_3)$

Berarti membentuk sistem persamaan linier:

$$\begin{aligned} 2 &= k_1 + k_3 \\ 3 &= k_2 + k_3 \\ -1 &= k_1 - k_2 - k_3 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan sistem persamaan linier ini akan diselesaikan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ b_3 - b_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ b_3 + b_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} b_1 + b_3 \\ b_2 + b_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Jadi, k_1=2, k_2=3, dan k_3=0. Sehingga kombinasi linier dari **u** adalah: **u**= 2$\mathbf{a}_1$+ 3$\mathbf{a}_2$+ 0$\mathbf{a}_3$

Contoh:

Nyatakan **q**=2 + 3x – 4x^2 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari B={**a**=1+2x-3x^2, **b**=3x + 4x^2, **c**=2+x+5x^2}

Jawab:

Akan dicari skalar-skalar *k*, *l*, dan *m*, yang memenuhi persamaan:

$$\mathbf{q}=k\mathbf{a}+l\mathbf{b}+m\mathbf{c}.$$

$2+3x–4x^2=k(1+2x-3x^2)+l(3x+4x^2)+m(2+x+5x^2)$

$2+3x–4x^2=(k+2m)+(2k+3l+m)x+(-3k+4l+5m)x^2$

Didapat sistem persamaan linier:

$$\begin{aligned} 2 &= k + 2m \\ 3 &= 2k + 3l + m \\ -4 &= -3k + 4l + 5m \end{aligned}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan sistem persamaan linier ini akan diselesaikan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 5 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 + 3b_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 11 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ b_3 - b_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 14 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ b_3 \\ b_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 14 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ b_3 - 3b_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & -45 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \frac{-1}{45} b_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 \end{array}\right] \begin{array}{l} b_1 - 2b_3 \\ b_2 - 14b_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 14/9 \\ 0 & 1 & 0 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 \end{array}\right]$$

Jadi, *k*=14/9, *l*=-1/9, *m*=2/9. Kombinasi linier dari **q** adalah **q**=(14**a**-**b**+2**c**)/9.

Contoh:

Jika S= $\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \right\}$, apakah

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari S?

Jawab:

Akan dicari k_1, k_2, k_3, dan k_4 yang memenuhi persamaan: $\mathbf{a} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_1 & -k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k_2 & 2k_2 \\ 3k_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -k_3 \\ k_3 & 2k_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_4 & 0 \\ 3k_4 & -2k_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_1 + 3k_2 + k_4 & -k_1 + 2k_2 - k_3 \\ 3k_2 + k_3 + 3k_4 & 2k_3 - 2k_4 \end{bmatrix}$$

(*dengan mengingat kesamaan matrik*), didapat sistem persamaan linier:

$2 = 2k_1 + 3k_2 \quad + \ k_4$

$3 = -k_1 + 2k_2 - k_3$

$1 = \quad 3k_2 + k_3 + 3k_4$

$-2 = \quad 2k_3 - 2k_4$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan sistem persamaan linier ini akan diselesaikan:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right]\begin{array}{l} b_2 \\ b_1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ b_1 + 2b_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ b_2 - 2b_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ b_3 - 3b_2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 18 & -17 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ \tfrac{1}{2} b_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 18 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ b_4 \\ b_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & 18 & -17 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ b_4 - 13b_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 31 & -4 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ \tfrac{1}{31} b_4 \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/31 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ b_2 - 5b_4 \\ b_3 + b_4 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 206/31 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -35/31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/31 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 + b_3 \\ b_2 + 4b_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 58/31 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 60/31 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -35/31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/31 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 - 2b_2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -62/31 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 60/31 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -35/31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/31 \end{bmatrix}$$

Sehingga solusinya adalah: $k_1=2$, $k_2=60/31$, $k_3=-35/31$, $k_4=-4/31$
Jadi, **a** dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier terhadap S, yaitu:

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{u}_1 + \frac{60}{31}\mathbf{u}_2 - \frac{35}{31}\mathbf{u}_3 - \frac{4}{31}\mathbf{u}_4$$

Contoh:
Apakah **a**=(2, -1, 3) dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari S={$\mathbf{u}_1$=(2, -2, 4), $\mathbf{u}_2$=(0, 1, 2), $\mathbf{u}_3$=(1, 0, 4)}?

Jawab:
Akan dicari k_1, k_2, dan k_3 yang memenuhi persamaan:
$\mathbf{a}=k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2+k_3\mathbf{u}_3$
$(2, -1, 3)=k_1(2, -2, 4)+k_2(0, 1, 2)+k_3(1, 0, 4)$
$(2, -1, 3)=(2k_1+k_3, -2k_1+k_2, 4k_1+2k_2+4k_3)$
Didapat sistem persamaan linier:

$$\begin{aligned} 2 &= 2k_1 + k_3 \\ -1 &= -2k_1 + k_2 \\ 3 &= 4k_1 + 2k_2 + 4k_3 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan sistem persamaan linier ini akan diselesaikan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ b_2 + b_1 \\ b_3 - 2b_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ b_3 - 2b_2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Karena sistem persamaan linier di atas tidak mempunyai solusi, berarti **a** tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari S.

Latihan:
1. Manakah vektor-vektor di bawah ini yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari S={$\mathbf{a}_1$=(1, -1, 0), $\mathbf{a}_2$=(0, 2, 1), $\mathbf{a}_3$=(1, 1, 1), $\mathbf{a}_4$=(1, 3, 2)}
   a. **u**=(2, 0, 1)
   b. **u**=(-1, 1, 1)
   c. **u**=(0, 2, 3)
   d. **u**=(4, 3, -1)
   e. **u**=(2, 1, -1)
   f. **u**=(0, 0, 1)

2. Apakah vektor-vektor pada bidang $3x + 2y - z = 0$, dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari S={$\mathbf{a}_1$=(2, 0, 3), $\mathbf{a}_2$=(0, 1, 2)}? Jelaskan!
3. Manakah polinom-polinom di bawah ini yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari: S={$\mathbf{p}_1=2+3x^2$, $\mathbf{p}_2=-1+x+3x^2$, $\mathbf{p}_3=3+x+9x^2$}
   a. $3+x+2x^2$
   b. $2x + 5x^2$
   c. $1+x+6x^2$
   d. $2 + 2x +12x^2$
   e. $5 - 2x^2$
   f. $4+2x+15x^2$

4. Nyatakan vektor-vektor di bawah ini, sebagai kombinasi linier dari:
   $$S=\left\{m_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, m_2 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, m_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$
   a. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

5. Pada himpunan mana sajakah polinom $2 - 3x + x^2$, dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier?
   a. A={$1+2x+x^2$, $3x-4x^2$, $-4x+3x^2$}
   b. B={$3+2x^2$, $4 + 3x-5x^2$, $-8-6x+3x^2$}
   c. C={2, $3x$, $4-3x^2$}
   d. D={$1+x$, $x+x^2$, $1-x^2$}
   e. E={$3+x^2$, $x-x^2$, $1+x^2$}
   f. F={x, $x+x^2$, x^2}

E. Membangun dan Bebas Linier

Definisi: Misalkan V ruang vektor. S={ $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_r$ }$\subseteq$V. S disebut **membangun** V, jika **setiap** vektor di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari S.

Contoh:
S={$\mathbf{e}_1$=(1, 0, 0), $\mathbf{e}_2$=(0, 1, 0), $\mathbf{e}_3$=(0, 0, 1)} membangun R^3. Karena setiap vektor di R^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari S, (a, b, c)=a$\mathbf{e}_1$ + b$\mathbf{e}_2$ + c$\mathbf{e}_3$.

B={$\mathbf{p}_1$=1, $\mathbf{p}_2$=x, $\mathbf{p}_3$=x^2} membangun P_2. Karena setiap vektor di P_2 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari B, a+bx+cx^2=a$\mathbf{p}_1$+b$\mathbf{p}_2$+c$\mathbf{p}_3$.

$$M=\left\{\mathbf{m}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \mathbf{m}_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \mathbf{m}_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \mathbf{m}_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$ membangun M_{2x2}, karena setiap vektor di M_{2x2} dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari M,

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=a\mathbf{m}_1+b\mathbf{m}_2+c\mathbf{m}_3+d\mathbf{m}_4$$

Contoh:
Apakah himpunan-himpunan di bawah ini membangun ruang vektor yang sesuai?

a. B={$\mathbf{u}_1$=(1, 2), $\mathbf{u}_2$=(-1, 1), $\mathbf{u}_3$=(0, 3)}
b. Q={$\mathbf{p}_1$=2+x+2x^2, $\mathbf{p}_2$=-1 + 2x +3x^2, $\mathbf{p}_3$=3x + 4x^2}
c. $M=\left\{\mathbf{m}_1=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \mathbf{m}_2=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}, \mathbf{m}_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right\}$

Jawab:

a. Karena B$\subseteq$ R^2, maka akan ditunjukkan bahwa B membangun R^2. Berarti apakah **w**=(a, b) dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari B, berarti pula apakah persamaan **w**=$k_1\mathbf{u}_1$+$k_2\mathbf{u}_2$+$k_3\mathbf{u}_3$ selalu mempunyai solusi?
(a, b)=k_1(1, 2)+k_2(-1, 1)+k_3(0, 3)
(a, b)=(k_1, 2k_1)+ (-k_2, k_2)+ (0, 3k_3)
(a, b)=(k_1 - k_2, 2k_1 + k_2 + 3k_3)
Didapat sistem persamaan linier:
a= k_1 - k_2
b=2k_1 + k_2 + 3k_3
Diselesaikan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & a\\ 2 & 1 & 3 & b\end{bmatrix} b_2-2b_1 \sim \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & a\\ 0 & 3 & 3 & b-2a\end{bmatrix} \tfrac{1}{3}b_2 \sim$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & a\\ 0 & 1 & 1 & \frac{(b-2a)}{3}\end{bmatrix} b_1+b_2 \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & \frac{a+b}{3}\\ 0 & 1 & 1 & \frac{(b-2a)}{3}\end{bmatrix}$$

dikembalikan ke bentuk sistem persamaan linier, didapat:

$$\begin{aligned} k_1 \quad + k_3 &= \frac{a+b}{3} \\ k_2 + k_3 &= \frac{b-2a}{3} \end{aligned}$$

dengan subtitusi mundur, didapat: $\begin{aligned} k_1 &= \frac{a+b}{3} - k_3 \\ k_2 &= \frac{b-2a}{3} - k_3 \end{aligned}$

karena k_3 dapat bernilai sebarang, maka k_3 dimisalkan sebagai sebuah parameter, k_3=t, sehingga, akibatnya k_1=(a+b)/3 -t, dan k_2=(b-2a)/3 - t, yang berarti selalu mempunyai solusi.
Jadi, B membangun R^2.

b. Karena Q$\subseteq$$P_2$, maka akan ditunjukkan bahwa Q membangun P_2. Berarti pula apakah persamaan $\mathbf{w}=k_1\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{p}_2+k_3\mathbf{p}_3$ selalu mempunyai solusi untuk bentuk umum **w**, $\mathbf{w}=a+bx+cx^2$.
$a+bx+cx^2= k_1(2+x+2x^2)+k_2(-1 + 2x +3x^2)+k_3(3x + 4x^2)$
$a+bx+cx^2= (2k_1+ k_1x+2k_1x^2)+ (-k_2 + 2k_2x +3k_2x^2)+ (3k_3x + 4k_3x^2)$
$a+bx+cx^2= (2k_1 - k_2)+ (k_1 + 2k_2 + 3k_3)x + (2k_1 + 3k_2 + 4k_3)x^2$
Didapat sistem persamaan linier:
$a=2k_1 - k_2$
$b= k_1 + 2k_2 + 3k_3$
$c=2k_1 + 3k_2 + 4k_3$
Sehingga didapat persamaan matrik:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Persamaan matrik di atas selalu mempunyai solusi, jika matrik koefisien mempunyai invers, berarti determinan matrik koefisien tidak sama dengan nol.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} b_1 - 2b_2 \\ \\ b_3 - 2b_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =-(30-6)=-24\neq 0$$

Jadi, Q membangun P_2.

c. Karena M$\subseteq$$M_{2x2}$, maka akan ditunjukkan bahwa M membangun M_{2x2}. Berarti pula apakah persamaan $\mathbf{w}=k_1\mathbf{m}_1+k_2\mathbf{m}_2+k_3\mathbf{m}_3$ selalu mempunyai solusi untuk bentuk umum **w**, $\mathbf{w}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_1 + k_3 & 3k_2 \\ -k_1 + 2k_2 + 2k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

Didapat sistem persamaan linier:

$a = 2k_1 + k_3$

$b = 3k_2$

$c = -k_1 + 2k_2 + 2k_3$

$d = k_2 + k_3$

Diselesaikan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 3 & 0 & b \\ -1 & 2 & 2 & c \\ 0 & 1 & 1 & d \end{bmatrix} \begin{matrix} b_3 \\ \\ b_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & c \\ 0 & 3 & 0 & b \\ 2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & d \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ b_3 + 2b_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & c \\ 0 & 3 & 0 & b \\ 0 & 4 & 5 & a+2c \\ 0 & 1 & 1 & d \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ b_4 \\ \\ b_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & c \\ 0 & 1 & 1 & d \\ 0 & 4 & 5 & a+2c \\ 0 & 3 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ b_3 - 4b_2 \\ b_4 - 3b_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & c \\ 0 & 1 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 & a+2c-4d \\ 0 & 0 & -3 & b-3d \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ b_4 + 3b_3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & c \\ 0 & 1 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 & a+2c-4d \\ 0 & 0 & 0 & 3a+6c+b-15d \end{bmatrix}$$

Dari matrik di atas, sistem persamaan linier di atas, hanya mempunyai solusi, jika 3a+b+6c-15d=0, sedangkan yang diminta untuk sebarang nilai: a, b, c, dan d. Jadi, ada matrik 2x2 yang tidak bisa dinyatakan sebagai kombinasi linier dari M.

Contoh penyangkal:

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari M.

Bukti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_1 + k_3 & 3k_2 \\ -k_1 + 2k_2 + 2k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

Didapat sistem persamaan linier:

$1 = 2k_1 + k_3$

$1 = 3k_2$

$1 = -k_1 + 2k_2 + 2k_3$

$1 = k_2 + k_3$

Diselesaikan dengan eliminasi Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} b_3 \\ \\ b_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ b_3+2b_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ b_4 \\ \\ b_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ b_3-4b_2 \\ b_4-3b_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ b_4+3b_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Dari matrik terakhir ini, terlihat bahwa SPL tidak mempunyai solusi.
Jadi, ada matrik 2x2 yang tidak bisa dinyatakan sebagai kombinasi linier dari M.
Jadi, M tidak membangun ruang vektor M_{2x2}.

Jika V ruang vektor. U={$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_r$}$\subseteq$V. Misalkan W himpunan dari semua kombinasi linier dari U, sehingga W=$\{k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2+ ...+k_r\mathbf{u}_r \mid k_1, k_2, ..., k_r\in R\}$, berarti W dibangun oleh U. Pertanyaan berikutnya adalah apakah ruang yang dibangun oleh U merupakan ruang vektor? Untuk menjawab pertanyaan ini cukup diperlihatkan bahwa W sub ruang dari V. Perhatikan uraian berikut ini:

1. Misalkan **a**, **b**$\in$W, berarti $\mathbf{a}=t_1\mathbf{u}_1+t_2\mathbf{u}_2+ ...+t_r\mathbf{u}_r$ dan $\mathbf{b}=l_1\mathbf{u}_1+l_2\mathbf{u}_2+ ...+l_r\mathbf{u}_r$, maka $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(t_1\mathbf{u}_1+t_2\mathbf{u}_2+ ...+t_r\mathbf{u}_r)+(l_1\mathbf{u}_1+l_2\mathbf{u}_2+ ...+l_r\mathbf{u}_r)=(t_1+l_1)\mathbf{u}_1+ (t_2+l_2)\mathbf{u}_2+ ...+ (t_r+l_r)\mathbf{u}_r$, karena $(t_1+l_1), (t_2+l_2), ..., (t_r+l_r) \in R$, jadi $\mathbf{a}+\mathbf{b}\in W$
2. Misalkan **a**$\in$W, berarti $\mathbf{a}=t_1\mathbf{u}_1+t_2\mathbf{u}_2+ ...+t_r\mathbf{u}_r$, maka $l\mathbf{a}=l(t_1\mathbf{u}_1+t_2\mathbf{u}_2+ ...+t_r\mathbf{u}_r)= lt_1\mathbf{u}_1+lt_2\mathbf{u}_2+ ...+lt_r\mathbf{u}_r$, karena $lt_1, lt_2, ..., lt_r\in R$, jadi $l\mathbf{a}\in W$

Jadi, W sub ruang.

Definisi:
Misalkan V ruang vektor. B={$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$}$\subseteq$V. Himpunan B disebut **bebas linier**, jika persamaan vektor:

$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + ...+ k_n\mathbf{a}_n = \mathbf{o}$$

hanya dipenuhi oleh $k_1 = k_2 = ...= k_n = 0$. Jika terdapat solusi yang lain, maka B disebut tak bebas linier/ bergantung linier.

Contoh:
S={$\mathbf{e}_1$=(1, 0, 0), $\mathbf{e}_2$=(0, 1, 0), $\mathbf{e}_3$=(0, 0, 1)} bebas linier, karena (0, 0, 0)=a$\mathbf{e}_1$ + b$\mathbf{e}_2$ + c$\mathbf{e}_3$=(a, b, c), berarti hanya dipenuhi oleh a=b=c=0.

B={$\mathbf{p}_1$=1, $\mathbf{p}_2$=x, $\mathbf{p}_3$=x^2} bebas linier, karena 0=a$\mathbf{p}_1$+b$\mathbf{p}_2$+c$\mathbf{p}_3$=a+bx+cx^2, berarti a=b=c=0.

M=$\left\{\mathbf{m}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \mathbf{m}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \mathbf{m}_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \mathbf{m}_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ bebas linier, karena persamaan vektor berikut $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$=a$\mathbf{m}_1$+b$\mathbf{m}_2$+c$\mathbf{m}_3$+d$\mathbf{m}_4$=$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, berarti didapat: a=b=c=d=0.

Contoh:
Apakah himpunan-himpunan di bawah ini bebas linier?

a. B={$\mathbf{u}_1$=(1, 2), $\mathbf{u}_2$=(-1, 1), $\mathbf{u}_3$=(0, 3)}
b. Q={$\mathbf{p}_1$=2+x+2x^2, $\mathbf{p}_2$=-1 + 2x +3x^2, $\mathbf{p}_3$=3x + 4x^2}
c. $M=\left\{\mathbf{m}_1=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \mathbf{m}_2=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}, \mathbf{m}_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right\}$

Jawab:

a. Karena B$\subseteq$ R^2, untuk menunjukkan B bebas linier, berarti apakah persamaan vektor $\mathbf{o}$=$k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2+k_3\mathbf{u}_3$, dimana $\mathbf{o}$=(0, 0) hanya mempunyai solusi trivial saja?
(0, 0)=k_1(1, 2)+k_2(-1, 1)+k_3(0, 3)
(0, 0)=(k_1, 2k_1)+ (-k_2, k_2)+ (0, 3k_3)
(0, 0)=(k_1 - k_2, 2k_1 + k_2 + 3k_3)
Didapat sistem persamaan linier:
0= k_1 - k_2
0=2k_1 + k_2 + 3k_3
Diselesaikan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan:
$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0\end{bmatrix} b_2-2b_1 \sim \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 3 & 0\end{bmatrix} \tfrac{1}{3}b_2 \sim \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix} b_1+b_2 \sim$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$
dikembalikan ke bentuk sistem persamaan linier, didapat: $\begin{matrix}k_1 & & + & k_3 & = & 0\\ & k_2 & + & k_3 & = & 0\end{matrix}$
dengan subtitusi mundur, didapat: $\begin{matrix}k_1 = & -k_3\\ k_2 = & -k_3\end{matrix}$
karena k_3 dapat bernilai sebarang, maka k_3 dimisalkan sebagai sebuah parameter, k_3=t, sehingga, akibatnya k_1=-t, dan k_2= - t, yang berarti ada solusi yang tak trivial.
Jadi, B tak bebas linier.

b. Karena Q$\subseteq$P$_2$, untuk menunjukkan Q bebas linier, berarti apakah persamaan vektor $\mathbf{o}$=$k_1\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{p}_2+k_3\mathbf{p}_3$ hanya mempunyai solusi trivial saja, untuk $\mathbf{o}$=0=0+0x+0x^2.
0+0x+0x^2= k_1(2+x+2x^2)+k_2(-1 + 2x +3x^2)+k_3(3x + 4x^2)
0+0x+0x^2= (2k_1+ k_1x+2k_1x^2)+ (-k_2 + 2k_2x +3k_2x^2)+ (3k_3x + 4k_3x^2)
0+0x+0x^2= (2k_1 - k_2)+ (k_1 + 2k_2 + 3k_3)x + (2k_1 + 3k_2 + 4k_3)x^2
Didapat sistem persamaan linier:
0=2k_1 - k_2
0= k_1 + 2k_2 + 3k_3
0=2k_1 + 3k_2 + 4k_3
Sehingga didapat persamaan matrik:
$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Persamaan matrik di atas selalu hanya mempunyai solusi trivial, jika matrik koefisien mempunyai invers, berarti determinan matrik koefisien tidak sama dengan nol.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} b_1 - 2b_2 \\ \\ b_3 - 2b_2 \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(30-6) = -24 \neq 0$$

Jadi, Q bebas linier.

c. Karena $M \subseteq M_{2x2}$, untuk menunjukkan M bebas linier, berarti apakah persamaan vektor $\mathbf{o}=k_1\mathbf{m}_1+k_2\mathbf{m}_2+k_3\mathbf{m}_3$ hanya mempunyai solusi trivial untuk $\mathbf{o}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_1 + k_3 & 3k_2 \\ -k_1 + 2k_2 + 2k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

Didapat sistem persamaan linier:

$0= 2k_1 \quad + \quad k_3$

$0= \quad 3k_2$

$0= -k_1 + 2k_2 + 2k_3$

$0= \quad k_2 + k_3$

Diselesaikan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} b_3 \\ \\ b_1 \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ b_3 + 2b_1 \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ b_4 \\ \\ b_2 \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ b_3 - 4b_2 \\ b_4 - 3b_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ b_4 + 3b_3 \end{array} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} b_1 - 2b_3 \\ b_2 - b_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} b_1 - 2b_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dikembalikan ke sistem persamaan linier, didapat: $-k_1=0$, $k_2=0$, $k_3=0$, berarti persamaan vektor di atas hanya mempunyai solusi trivial saja. Jadi, M bebas linier.

Latihan:

1. Apakah himpunan-himpunan di bawah ini membangun ruang vektor yang sesuai?
   a. S={$\mathbf{u}_1$=(1, 2), $\mathbf{u}_2$=(-1, 0)}
   b. B={$\mathbf{u}_1$=(3, 1, 1), $\mathbf{u}_2$=(0, 2, -1), $\mathbf{u}_3$=(3, 2, -1)}
   c. P={$\mathbf{u}_1$=(2, -2, -4), $\mathbf{u}_2$=(3, 0, 5), $\mathbf{u}_3$=(-1, -5, -20)}

d. Q={$\mathbf{u}_1$=(1, 0, 1, 2), $\mathbf{u}_2$=(2, 2, 3, 7), $\mathbf{u}_3$=(1, 1, 2, 4), $\mathbf{u}_4$=(-1, -1, -2, -2)}
e. B={$\mathbf{u}_1$=(2, 1), $\mathbf{u}_2$=(0, 1), $\mathbf{u}_3$=(3, 3)}

2. Apakah himpunan-himpunan di bawah ini membangun ruang vektor yang sesuai?
   a. B={$\mathbf{p}_1$=2 - 3x, $\mathbf{p}_2$=1 + 2x}
   b. B={$\mathbf{p}_1$=1 - 2x + x^2, $\mathbf{p}_2$=1 + x + x^2, $\mathbf{p}_3$=1 - x^2}
   c. B={$\mathbf{p}_1$=2 + 2x + x^2, $\mathbf{p}_2$=4 + 2x - x^2, $\mathbf{p}_3$=-1 - x^2}
   d. B={$\mathbf{p}_1$=1 - x - x^2 + $2x^3$, $\mathbf{p}_2$= x + $3x^2$, $\mathbf{p}_3$=2 –2x - x^2 + $4x^3$, $\mathbf{p}_4$=-1 + 2x + $4x^2$ + x^3}
   e. B={$\mathbf{p}_1$=1 - x, $\mathbf{p}_2$=1 + 2x, $\mathbf{p}_3$=2 + x}

3. Apakah himpunan-himpunan di bawah ini membangun ruang vektor yang sesuai?
   a. $B=\left\{\mathbf{m}_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \mathbf{m}_2=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}, \mathbf{m}_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \mathbf{m}_4=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right\}$
   b. $B=\left\{\mathbf{m}_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}, \mathbf{m}_2=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & -1\end{bmatrix}, \mathbf{m}_3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}, \mathbf{m}_4=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}$

4. Apakah himpunan-himpunan yang terdapat pada soal no. 1 di atas bebas linier?
5. Apakah himpunan-himpunan yang terdapat pada soal no. 2 di atas bebas linier?
6. Apakah himpunan-himpunan yang terdapat pada soal no. 3 di atas bebas linier?
7. Tentukan vektor-vektor yang membangun himpunan semua vektor di bidang: 2x + 3y – z = 0. Apakah vektor-vektor tersebut bebas linier? Jelaskan!
8. Tentukan vektor-vektor yang membangun himpunan semua vektor di garis: x=3t, y=2t, z = -2t. Apakah vektor-vektor tersebut bebas linier? Jelaskan!
9. Tentukan vektor-vektor yang membangun {a + bx +cx^2| 2a + b = c}. Apakah vektor-vektor tersebut bebas linier? Jelaskan!
10. Tentukan vektor-vektor yang membangun $\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \middle| b = a + d, c = a - 2d\right\}$. Apakah vektor-vektor tersebut bebas linier? Jelaskan!

F. Basis dan Dimensi
Definisi:
Misalkan V ruang vektor.
B={$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$}$\subseteq$ V.
B disebut **basis** ruang vektor V, jika B memenuhi dua aksioma, berikut:
1. B bebas linier
2. B membangun V

Contoh:
Pada sub bab sebelumnya telah diperlihatkan, bahwa himpunan-himpunan di bawah ini, bebas linier dan membangun oleh karena itu himpunan-himpunan tersebut merupakan salah satu basis dari masing-masing ruang vektor:
S={$\mathbf{e}_1$=(1, 0, 0), $\mathbf{e}_2$=(0, 1, 0), $\mathbf{e}_3$=(0, 0, 1)} basis di R^3.
B={$\mathbf{p}_1$=1, $\mathbf{p}_2$=x, $\mathbf{p}_3$=x^2} basis polinom berderajat maksimal 2

M=$\left\{\mathbf{m}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\mathbf{m}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\mathbf{m}_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\mathbf{m}_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ basis matrik 2x2.

Basis-basis di atas disebut **basis baku** dari masing-masing ruang vektor.

Basis suatu ruang vektor **tidak tunggal**, contoh: Q={$\mathbf{p}_1$=2+x+2x^2, $\mathbf{p}_2$=-1 + 2x +3x^2, $\mathbf{p}_3$=3x + 4x^2}, himpunan Q telah ditunjukkan membangun dan juga bebas linier, oleh karena itu Q juga basis P_2.

Definisi:
Misalkan {**o**}≠V ruang vektor. V disebut berdimensi berhingga, jika mempunyai himpunan yang banyak anggotanya berhingga yang menjadi basis. Jika tidak ada himpunan yang demikian ini disebut berdimensi tak hingga. Perkecualian, walaupun ruang vektor nol tidak mempunyai basis, namun dianggap berdimensi berhingga.

Contoh:
R^3, P_2, M_{2x2} termasuk berdimensi berhingga.
Himpunan semua bilangan riil berdimensi tak berhingga.

Misalkan S={$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$}basis dari ruang vektor V yang berdimensi berhingga, jika B={$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_m$}⊆V dengan m>n,
Bentuklah persamaan:

$$\mathbf{o}=l_1\mathbf{v}_1+ l_2\mathbf{v}_2 + ...+ l_m\mathbf{v}_m$$

Subtitusi, dengan :

$$\mathbf{v}_1=k_{11}\mathbf{a}_1 + k_{12}\mathbf{a}_2 + ... + k_{1n}\mathbf{a}_n$$
$$\mathbf{v}_2=k_{21}\mathbf{a}_1 + k_{22}\mathbf{a}_2 + ... + k_{2n}\mathbf{a}_n$$
$$\approx$$
$$\mathbf{v}_m=k_{m1}\mathbf{a}_1 + k_{m2}\mathbf{a}_2 + ... + k_{mn}\mathbf{a}_n$$

(*karena S basis berarti S membangun V, berarti anggota-anggota B dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari S*)

didapat:

$\mathbf{o}=l_1(k_{11}\mathbf{a}_1 + k_{12}\mathbf{a}_2 + ... + k_{1n}\mathbf{a}_n)+ l_2(k_{21}\mathbf{a}_1 + k_{22}\mathbf{a}_2 + ... + k_{2n}\mathbf{a}_n) + ...+ l_m(k_{m1}\mathbf{a}_1 + k_{m2}\mathbf{a}_2 + ... + k_{mn}\mathbf{a}_n)$

$\mathbf{o}= (l_1k_{11} + l_2k_{21} + ...+ l_mk_{m1})\mathbf{a}_1 +(l_1k_{12}+ l_2k_{22}+ ...+ l_m k_{m2})\mathbf{a}_2 + ... + (l_1k_{1n} + l_2k_{2n} + ... + l_mk_{mn})\mathbf{a}_n$

karena S bebas linier, maka:

$l_1k_{11} + l_2k_{21} + ...+ l_mk_{m1} =0$
$l_1k_{12} + l_2k_{22} + ... + l_mk_{m2}=0$
$\approx$
$l_1k_{1n} + l_2k_{2n} + ... + l_mk_{mn}=0$

Karena m>n, maka sistem persamaan linier homogen di atas mempunyai solusi tak trivial, berarti skalar-skalar l_1, l_2, ..., l_m tidak harus bernilai nol semua, berarti B tak bebas linier.

Akibat dari kenyataan ini, maka setiap basis ruang vektor mempunyai banyak anggota yang sama. Hal ini diperlihatkan sebagai berikut:

Misalkan S={ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ }, dan B={$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m$} basis V. Karena S basis dan B bebas linier, maka m≤n, dan karena B basis dan S bebas linier, maka n≤m. Jadi, m=n.

Contoh: pada P_2, basis baku mempunyai 3 anggota dan Q juga 3 anggota.

Dari kenyataan ini, didefinisikan dimensi, sebagai berikut:
Definisi:
Misalkan V ruang vektor berdimensi berhingga, **dimensi** dari V, ditulis **dim(V)**, adalah banyaknya anggota (kardinal) dari basis. Perkecualian, untuk ruang nol didefinisikan berdimensi nol.

Contoh:
$\dim(R^3)=3$, $\dim(R^n)=n$, $\dim(M_{2x2})=4$, $\dim(P_2)=3$, $\dim(P_n)=n+1$.

Contoh:
Tentukan dimensi dari sub ruang pada bidang: -x + 2y +5z=0.

Jawab:
x=2y + 5z, karena y dan z anu yang bebas, maka dapat digantikan oleh y=t, dan z=s, sehingga:
x=2t + 5s, atau dalam bentuk vektor: (x, y, z)=t(2, 1, 0)+s(5, 0, 1). Yang berarti B={(2, 1, 0), (5, 0, 1)} membangun bidang –x + 2y + 5z = 0, dan bebas linier (*tunjukkan*). Berarti B basis dan dimensinya: 2.

Contoh:
Tentukan basis dan dimensi dari ruang solusi sistem persamaan linier homogen berikut:

$$\begin{aligned} 2x + 2y - 3z \quad\;\; &= 0 \\ 2x + 3y - \;\; z - \;w &= 0 \\ 2x + 5y + 3z - 3w &= 0 \end{aligned}$$

Jawab:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - b_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ b_3 - 3b_2 \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} b_1 - 2b_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2x - 7z + 2w = 0$ atau $x = (7z - 2w)/2$
$y + 2z - w = 0$ atau $y = -2z + w$
karena z dan w anu yang bebas, misalkan z = t dan w=s, maka didapat:
$x = (7t - 2s)/2$
$y = -2t + s$
Sehingga solusinya berbentuk:
(x, y, z, w)=t (7/2, -2, 1, 0) + s (-1, 1, 0, 1)
Jadi, basis ruang solusi sistem persamaan linier di atas adalah: {(7/2,-2,1,0), (-1,1,0,1)} dan dimensi: 2.

Contoh:
Tentukan basis dan dimensi dari ruang vektor polinom yang berbentuk $a+bx+cx^2$, dengan syarat $a=b+2c$.

Jawab:
Karena syarat $a=b+2c$, menyebabkan bentuk vektor polinom menjadi: $(b+2c)+bx+cx^2= b(1+x)+c(2+x^2)$, berarti $\{1+x, 2+x^2\}$ membangun ruang vektor polinom yang diberikan dan karena $\{1+x, 2+x^2\}$ bebas linier (*tunjukkan!*), maka $\{1+x, 2+x^2\}$ basis dan dimensinya: 2.

Latihan:
1. Apakah himpunan vektor-vektor di bawah ini basis ruang vektor yang sesuai? Jelaskan.
   a. $B=\{\mathbf{u}_1=(3, -1), \mathbf{u}_2=(3, 2)\}$
   b. $B=\{\mathbf{u}_1=(3, 0), \mathbf{u}_2=(1, 2), \mathbf{u}_3=(-2, 1)\}$
   c. $B=\{\mathbf{u}_1=(2, 1, 0), \mathbf{u}_2=(1, -1, 2), \mathbf{u}_3=(-2, 2, 1)\}$
   d. $B=\{\mathbf{u}_1=(2, 1, 1), \mathbf{u}_2=(1, -1, -4), \mathbf{u}_3=(0, 2, 6)\}$
   e. $B=\{\mathbf{u}_1=(1, 0, 1, 2), \mathbf{u}_2=(2, 2, 3, 7), \mathbf{u}_3=(1, 1, 2, 4), \mathbf{u}_4=(-1, -1, -2, -2)\}$

2. Apakah himpunan vektor-vektor di bawah ini basis ruang vektor yang sesuai? Jelaskan.
   a. $B=\{\mathbf{p}_1=1 - x, \mathbf{p}_2= 2 + 3x\}$
   b. $B=\{\mathbf{p}_1=1 - x - x^2 , \mathbf{p}_2= x + 3x^2, \mathbf{p}_3=2 - 2x - x^2\}$
   c. $B=\{\mathbf{p}_1=2 + 4x, \mathbf{p}_2=2 + 2x + 2x^2, \mathbf{p}_3= -1 +2x - 4x^2\}$
   d. $B=\{\mathbf{p}_1=1 - x - x^2 + 2x^3, \mathbf{p}_2= x + 3x^2, \mathbf{p}_3=2 -2x - x^2 + 4x^3, \mathbf{p}_4=-1 + 2x + 4x^2 + x^3\}$
   e. $B=\{\mathbf{p}_1=2+x+2x^2+2x^3, \mathbf{p}_2= 4+4x +10x^2+6x^3, \mathbf{p}_3=2+2x+x^2+x^3, \mathbf{p}_4=2+4x+13x^2+6x^3\}$

3. Apakah himpunan vektor-vektor di bawah ini basis ruang vektor yang sesuai? Jelaskan.
   a. $B=\left\{\mathbf{m}_1=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}, \mathbf{m}_2=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}, \mathbf{m}_3=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}, \mathbf{m}_4=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}\right\}$
   b. $B=\left\{\mathbf{m}_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \mathbf{m}_2=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}, \mathbf{m}_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \mathbf{m}_4=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right\}$

4. Tentukan basis dan dimensi dari ruang vektor yang diberikan:
   a. Semua vektor berbentuk (a, b, c, d) dengan $b = a - 3d$, $c = a + d$
   b. Semua polinom berbentuk $a+bx+cx^2 +dx^3$, dengan $a=0$, $d=b + 2c$
   c. Semua vektor di bidang $3x + y + 5z = 0$
   d. Semua vektor di garis $x=5t$, $y=-3t$, $z=4t$
   e. Semua matrik $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, dengan syarat $a = 2b + 3c - d$.

5. Tentukan basis dan dimensi ruang solusi sistem persamaan linier homogen berikut:

a. $$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 &= 0 \\ 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

b. $$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

c. $$\left.\begin{aligned} \alpha x + y &= 0 \\ x + \alpha y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

d. $$\left.\begin{aligned} x + y - z + w - v &= 0 \\ 2y - 3z + 4w - 3v &= 0 \\ -x + y - 2z + 3w - 2v &= 0 \end{aligned}\right\}$$

RUANG HASIL KALI DALAM

A. Ruang Hasil Kali Dalam

Sebagai generalisasi dari hasil kali titik (hasil kali dalam Euclides), keempat sifat dari hasil kali titik diambil sebagai aksioma. Hasil kali dalam merupakan operasi yang mengkaitkan antara ruang vektor dengan bilangan riil.

Definisi:
Misalkan V ruang vektor.
Operasi yang mengkaitkan anggota V, misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, dengan bilangan riil, ditulis $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>$, disebut **hasil kali dalam**, jika memenuhi empat aksioma:

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, berlaku $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>=<\mathbf{v}, \mathbf{u}>$ {*kesimetrian*}
2. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, berlaku $<\mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{v}>=<\mathbf{u}, \mathbf{v}>+<\mathbf{w}, \mathbf{v}>$ {*penjumlahan*}
3. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ dan $\forall k \in R$, berlaku $<k\mathbf{u}, \mathbf{v}>=k<\mathbf{u}, \mathbf{v}>$ {*kehomogenan*}
4. $\forall \mathbf{u} \in V$, berlaku $<\mathbf{u}, \mathbf{u}> > 0$ dan $<\mathbf{u}, \mathbf{u}>=0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u}=\mathbf{o}$ {*kepositifan*}

Ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut **ruang hasil kali dalam**.

Contoh:
Jelas bahwa hasil kali titik:
$<\mathbf{u}, \mathbf{v}>=u_1v_1+u_2v_2+ ...+u_nv_n$, untuk $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$, merupakan hasil kali dalam.

Contoh:
Bentuk lain dari hasil kali titik adalah hasil kali titik yang diberi bobot, misalkan k_1, k_2, ..., k_n bilangan riil positif, hasil kali titik yang diboboti, dinyatakan dalam bentuk:
$<\mathbf{u}, \mathbf{v}>= k_1u_1v_1+ k_2u_2v_2+ ...+ k_nu_nv_n$ untuk $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$

Bukti:

1. Ambil $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$, maka
   $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>= k_1u_1v_1+ k_2u_2v_2+ ...+ k_nu_nv_n$, {*komutatif terhadap perkalian*}
   $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>= k_1v_1u_1+ k_2v_2u_2+ ...+ k_nv_nu_n$, {*definisi hasil kali titik yang diboboti*}
   Jadi, $<\mathbf{u},\mathbf{v}>=<\mathbf{v}, \mathbf{u}>$
2. Ambil $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in R^n$, maka {*ingat kembali, bahwa* $\mathbf{u}+\mathbf{w}=(u_1+w_1, u_2+w_2, ..., u_n+w_n)$}
   $<\mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{v}>= k_1(u_1+w_1)v_1+ k_2(u_2+w_2)v_2+ ...+ k_n(u_n+w_n)v_n$
   {*sifat distributif bilangan riil*}
   $<\mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{v}>= k_1(u_1v_1+w_1v_1) + k_2(u_2v_2+w_2v_2) + ...+ k_n(u_nv_n+w_nv_n)$
   {*distributif bilangan riil*}
   $<\mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{v}>= (k_1u_1v_1+ k_1w_1v_1) + (k_2u_2v_2+ k_2w_2v_2) + ...+ (k_nu_nv_n+ k_nw_nv_n)$
   {*asosiatif bil. riil*}
   $<\mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{v}>= (k_1u_1v_1 +k_2u_2v_2+ ... + k_nu_nv_n)+(k_1w_1v_1+k_2w_2v_2+ ...+k_nw_nv_n)$
   {*definisi* $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>$}
   Jadi, $<\mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{v}>=<\mathbf{u}, \mathbf{v} >+<\mathbf{w}, \mathbf{v} >$
3. Ambil $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$, dan ambil $l \in R$, maka {*ingat kembali bahwa* $l\mathbf{u}=(lu_1, lu_2, ..., lu_n)$}
   $<l\mathbf{u},\mathbf{v}>= k_1\, lu_1v_1+ k_2\, lu_2v_2+ ...+ k_n\, lu_nv_n$ {*distributif bilangan riil*}
   $<l\mathbf{u},\mathbf{v}>= l(k_1u_1v_1+ k_2u_2v_2+ ...+ k_nu_nv_n)$ {*definisi* $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>$}
   Jadi, $<l\mathbf{u},\mathbf{v}>=l<\mathbf{u}, \mathbf{v}>$

4. Ambil $\mathbf{u} \in R^n$, maka
   $<\mathbf{u}, \mathbf{u}> = k_1u_1u_1 + k_2u_2u_2 + ... + k_nu_nu_n$
   $<\mathbf{u}, \mathbf{u}> = k_1u_1^2 + k_2u_2^2 + ... + k_nu_n^2 \geq 0$, dan bernilai nol, jika $u_1=u_2=...=u_n=0$, berarti $\mathbf{u}=\mathbf{o}$.
   Jadi, aksioma keempat dipenuhi.

Contoh:
Untuk $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M_{2x2}$, didefinisikan operasi bernilai riil, berikut:

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = < \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix} > = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 .$$

Apakah operasi ini hasil kali dalam?

Jawab:

1. Ambil $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M_{2x2}$, misalkan: $\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, maka
   $<\mathbf{a}, \mathbf{b}> = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$ {*komutatif perkalian bilangan riil*}
   $<\mathbf{a}, \mathbf{b}> = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 + b_4a_4$ {*definisi operasi* $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>$}
   $<\mathbf{a}, \mathbf{b}> = <\mathbf{b}, \mathbf{a}>$
2. Ambil $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in M_{2x2}$, misalkan: $\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$,maka
   $<\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}> = (a_1+b_1)c_1 + (a_2+b_2)c_2 + (a_3+b_3)c_3 + (a_4+b_4)c_4$
   {*distributif bilangan riil*}
   $<\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}> = a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 + a_3c_3 + b_3c_3 + a_4c_4 + b_4c_4$
   {*asosiatif bilangan riil*}
   $<\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}> = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + a_4c_4) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4)$
   {*definisi operasi* $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>$}
   $<\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}> = <\mathbf{a}, \mathbf{c}> + <\mathbf{b}, \mathbf{c}>$
3. Ambil $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M_{2x2}$, misalkan: $\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, ambil $k \in R$,maka
   $<k\mathbf{a}, \mathbf{b}> = (ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 + (ka_3)b_3 + (ka_4)b_4$
   {*distributif bilangan riil*}
   $<k\mathbf{a}, \mathbf{b}> = k(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)$
   {*definisi operasi* $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>$}
   $<k\mathbf{a}, \mathbf{b}> = k<\mathbf{a}, \mathbf{b}>$
4. Ambil $\mathbf{a} \in M_{2x2}$, misalkan: $\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, maka
   $<\mathbf{a}, \mathbf{a}> = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 + a_4a_4 \geq 0$
   {*sifat kuadrat bilangan riil*}
   dan $<\mathbf{a}, \mathbf{a}> = 0$, jika $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=0$, $a_4=0$, atau $\mathbf{a}=\mathbf{o}$

Jadi, operasi bernilai riil di atas merupakan hasil kali dalam

Contoh:
Untuk **u**, **v**$\in$ P$_2$, didefinisikan operasi bernilai riil, berikut:
$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >=< a_0 + a_1 x + a_2 x^2 , b_0 + b_1 x + b_2 x^2 >= a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.
Apakah operasi ini hasil kali dalam?

Jawab:
1. Ambil **p**, **q**$\in$ P$_2$, **p**=$p_0+p_1x+p_2x^2$, **q**=$q_0+q_1x+q_2x^2$, maka
   <**p**, **q**> = $p_0q_0+p_1q_1+p_2q_2$ {*komutatif bilangan riil*}
   <**p**, **q**> = $q_0p_0+q_1p_1+q_2p_2$ {*definisi operasi* <**u**, **v**>}
   <**p**, **q**> =<**q**, **p**>
2. Ambil **p**, **q**, **r**$\in$ P$_2$, **p**=$p_0+p_1x+p_2x^2$, **q**=$q_0+q_1x+q_2x^2$, **r**=$r_0+r_1x+r_2x^2$,maka
   <**p**+**q**, **r**> = $(p_0+q_0)r_0+(p_1+q_1)r_1+(p_2+q_2)r_2$ {*distributif bilangan riil*}
   <**p**+**q**, **r**> = $p_0r_0+q_0r_0 + p_1r_1+q_1r_1 + p_2r_2+q_2r_2$ {*asosiatif bilangan riil*}
   <**p**+**q**, **r**> = $(p_0r_0+ p_1r_1+ p_2r_2) + (q_0r_0 +q_1r_1 +q_2r_2)$ {*asosiatif bilangan riil*}
   <**p**+**q**, **r**> =<**p**, **r**> + <**q**, **r**> {*definisi operasi* <**u**, **v**>}
3. Ambil **p**, **q**$\in$ P$_2$, **p**=$p_0+p_1x+p_2x^2$, **q**=$q_0+q_1x+q_2x^2$, maka
   <k**p**, **q**> = $kp_0q_0+kp_1q_1+kp_2q_2$ {*distributif bilangan riil*}
   <k**p**, **q**> = $k(p_0q_0+p_1q_1+p_2q_2)$ {*definisi operasi* <**u**, **v**>}
   <k**p**, **q**> = k<**p**, **q**>
4. Ambil **p**$\in$ P$_2$, **p**=$p_0+p_1x+p_2x^2$, maka
   <**p**, **p**> = $p_0p_0+p_1p_1+p_2p_2\geq 0$ {*kuadrat bilangan riil*}
   dan <**p**, **p**> =0, jika p_0=0, p_1=0, p_2=0, atau **p**=0=**o**

Jadi, operasi bernilai riil dari polinom di atas merupakan hasil kali dalam

Contoh: (*polinom dan integral*)
Untuk **u**, **v**$\in$ P$_2$, didefinisikan operasi bernilai riil, berikut:

<**u**, **v**>= $\int_0^1 u(x)v(x)dx$

Apakah operasi tersebut hasil kali dalam?
Jawab:
1. Ambil **p**, **q**$\in$ P$_2$, maka
   <**p**, **q**>= $\int_0^1 p(x)q(x)dx$ {*sifat komutatif integral fungsi riil*}
   <**p**, **q**>= $\int_0^1 q(x)p(x)dx$ {*definisi* <**u**, **v**>}
   <**p**, **q**>=<**q**, **p**>

2. Ambil **p**, **q**, **r**$\in$ P$_2$, maka
   <**p** + **r**, **q**>= $\int_0^1 (p(x)+r(x))q(x)dx$ {*distributif bilangan riil*}

$<\mathbf{p}+\mathbf{r}, \mathbf{q}> = \int_0^1 (p(x)q(x)+r(x)q(x))dx$ {*sifat integral penjumlahan fungsi*}

$<\mathbf{p}+\mathbf{r}, \mathbf{q}> = \int_0^1 p(x)q(x)dx + \int_0^1 r(x)q(x)dx$ { *definisi* <**u**, **v**>}

$<\mathbf{p}+\mathbf{r}, \mathbf{q}> = <\mathbf{p}, \mathbf{q}> + <\mathbf{r}, \mathbf{q}>$

3. Ambil **p**, **q**$\in P_2$, maka

   $<k\mathbf{p}, \mathbf{q}> = \int_0^1 kp(x)q(x)dx$ {*sifat integral perkalian dgn konstanta*}

   $<k\mathbf{p}, \mathbf{q}> = k\int_0^1 p(x)q(x)dx$ {*definisi* <**u**, **v**>}

   $<k\mathbf{p}, \mathbf{q}> = k<\mathbf{p}, \mathbf{q}>$
4. Ambil **p**$\in P_2$, maka

   $<\mathbf{p}, \mathbf{p}> = \int_0^1 p(x)p(x)dx \geq 0$ {*sifat integral fungsi riil kuadrat*}

   dan <**p**, **p**>=0, jika *p(x)*=0 atau **p**=**o**

Jadi, <**u**, **v**> yang didefinisikan termasuk hasil kali dalam

Contoh:
Untuk **u**, **v**$\in R^2$, didefinisikan operasi berikut:
$<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = u_1v_2+u_2v_1$
Apakah operasi tersebut hasil kali dalam?

Jawab:
Operasi yang didefinisikan di atas bukan hasil kali dalam, dengan contoh penyangkal:
u=(3, 0)≠**o**, tetapi <**u**, **u**>=<(3, 0), (3, 0)>=3.0+0.3=0.
Jadi, bukan hasil kali dalam

Contoh:
Terhadap hasil kali dalam berikut, untuk **u**, **v**$\in M_{2x2}$, **u**=$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$, **v**=$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$:
$<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = 3u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3+2u_4v_4$
Dan vektor: **a**=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, **b**=$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, dan **c**=$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, hitunglah:

a. <**a**, **b**>
b. <**a**+**c**, **b**>
c. <**a**, **b**> + <**c**, **b**>
d. <-3**c**, **a**>
e. –3<**a**, **c**>
f. $<\mathbf{a}, \mathbf{a}>^{1/2}$
g. $<\mathbf{c}, \mathbf{c}>^{1/2}$

Jawab:

a. $<\mathbf{a}, \mathbf{b}>$=3.1.2+2.1+0.(-4)+2.(-1).3=2

b. $<\mathbf{a}+\mathbf{c}, \mathbf{b}>=<\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}>$=3.(-3).2+3.1+0.(-4)+2.(-1).3=-21

c. $<\mathbf{a}, \mathbf{b}> + <\mathbf{c}, \mathbf{b}>$={3.1.2+2.1+0.(-4) + 2.(-1).3} + {3.(-4).2+1.1 + 0.(-4) + 2.0.3}=
=2+(-23)=-21

d. $<-3\mathbf{c}, \mathbf{a}>=<\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}>$=3.12.1+(-3).2+0.0+2.0.(-1)=30

e. $-3<\mathbf{a}, \mathbf{c}>$=-3{3.1.(-4)+2.1+0.0+2.(-1).0}=30

f. $<\mathbf{a}, \mathbf{a}>^{1/2}=\{3.1.1+2.2+0.0+2.(-1).(-1)\}^{1/2}=3$

g. $<\mathbf{c}, \mathbf{c}>^{1/2}=\{3.(-4).(-4)+1.1+0.0+2.0.0\}^{1/2}=7$

Latihan:

Untuk soal no. 1 s/d 10, tunjukkan operasi tersebut merupakan hasil kali dalam atau jika bukan hasil kali dalam, berikan contoh penyangkal.

1. $<(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)>=(a_1+1)b_1 +(a_2+1)b_2 + (a_3+1)b_3$
2. $<a_0+a_1x+a_2x^2, b_0+b_1x+b_2x^2>=3a_0b_0+2a_1b_1+a_2b_2$
3. $<\mathbf{p}, \mathbf{q}>=p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(-1)q(-1)$, untuk $\mathbf{p}=p(x)$, $\mathbf{q}=q(x)\in P_2$
4. $<(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)>=a_1b_1 + 3a_2b_2 + a_3b_3$
5. $<(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)>= (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 +b_3)$
6. $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>=u_1^2v_1^2+u_2^2v_2^2+u_3^2v_3^2+u_4^2v_4^2$, untuk $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$
7. $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>=3u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3+2u_4v_4$, untuk $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$
8. $<(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)>=a_1b_1 - 4a_2b_2 + a_3b_3$
9. $<(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4)>= a_1b_1 + 4a_2b_2 + a_3b_3 + 5a_4b_4$
10. $< \mathbf{u}, \mathbf{v}>=7u_2v_2+6u_4v_4$, untuk $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$
11. Terhadap hasil kali dalam pada soal no. 2, hitunglah: $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>$ dan $<\mathbf{v}, \mathbf{u}>$, jika $\mathbf{u}$=(2, -1, 3) dan $\mathbf{v}$=(0,5,4)
12. Terhadap hasil kali dalam pada soal no. 3, tentukan k sehingga $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>=0$, jika $\mathbf{u}=2k + 3x - 2x^2$, dan $\mathbf{v}=4x + 3x^2$
13. Jika $\mathbf{p}$=(0, 1, -1, 2) dan $\mathbf{q}$=(3, -2, 4, 1), hitung k sehingga $k<\mathbf{p}, \mathbf{q}>=4$, dengan menggunakan hasil kali dalam pada soal no. 9
14. Jika $\mathbf{p}$ = (0, 1, -1, 2), $\mathbf{q}$ = (3, -2, 4, 1), d an $\mathbf{r}$=(2, 3, -1, 0), hitung $<\mathbf{p}+\mathbf{r}, \mathbf{q}>$ dan $<\mathbf{p}, \mathbf{q}> + <\mathbf{r}, \mathbf{q}>$, dengan menggunakan hasil kali dalam pada soal no. 9
15. Jika $\mathbf{p}=p(x)=2 - 3x + x^2$ dan $\mathbf{q}=q(x)=x - 2x^2$, dengan menggunakan hasil kali dalam $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>= \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx$, hitunglah $<\mathbf{p}, \mathbf{q}>$, $<\mathbf{q}, \mathbf{p}>$, $<\mathbf{p}, \mathbf{p}>$, dan $<\mathbf{q}, \mathbf{q}>$
16. Terhadap hasil kali dalam yang didefinisikan berikut: untuk $\mathbf{p}=a_0+a_1x+a_2x^2$ dan $\mathbf{q} = b_0+b_1x+b_2x^2$, $<\mathbf{p}, \mathbf{q}> = 2a_0b_0+3a_1b_1 + a_2b_2$, jika $\mathbf{r} = 2 + 3x - 4x^2$ dan $\mathbf{t} = -2x + x^2$, hitunglah $<\mathbf{r}, \mathbf{t}>$, $<\mathbf{t}, \mathbf{r}>$, $<\mathbf{r}, \mathbf{r}>$, dan $<\mathbf{t}, \mathbf{t}>$

B. Panjang dan Sudut

Sebagaimana pada hasil kali titik, maka didefinisikan hal-hal sebagai berikut, tentunya panjang, jarak dan sudut di dalam ruang hasil kali dalam ini tidak dapat divisualisasikan.

Definisi:
Misalkan V ruang hasil kali dalam, misalkan **u**, **v**$\in$ V

1. Panjang vektor **u**, didefinisikan: 7**u**7=<**u**, **u**>$^{1/2}$
2. Jarak antara **u** dan **v**, didefinisikan: 7**u** - **v**7=<**u-v**, **u-v**>$^{1/2}$
3. Cosinus sudut antara **u** dan **v**, didefinisikan: $\cos\theta = \dfrac{<\mathbf{u}, \mathbf{v}>}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$, jika **u**$\neq$**o** dan **v**$\neq$**o**

Contoh: (*hasil kali titik yang diboboti untuk R^n*)
Terhadap hasil kali dalam:
<**u**, **v**>=$2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3$
dan diberikan: **u**=(0, 2, 2) dan **v**=(3, 2, 1). Hitung:

a. Panjang **u** dan panjang **v**
b. Jarak antara **u** dan **v**
c. Cosinus sudut antara **u** dan **v**.

Jawab:

a. Panjang **u** =7**u**7=<**u**, **u**>$^{1/2}$=(2.0.0 + 2.2 + 3.2.2)$^{1/2}$=(4+12)$^{1/2}$=4
   Panjang **v** =7**v**7=<**v**, **v**>$^{1/2}$=(2.3.3 + 2.2 + 3.1.1)$^{1/2}$=(18+4+3)$^{1/2}$=5
b. Jarak antara **u** dan **v** = 7**u** - **v**7 = <**u-v**, **u-v**>$^{1/2}$ = <(-3, 0, 1), (-3, 0, 1)>$^{1/2}$ = (2.(-3).(-3)+0.0 + 3.1.1)$^{1/2}$=21$^{1/2}$
c. Cosinus sudut antara **u** dan **v**= $\cos\theta = \dfrac{2.0.3 + 2.2 + 3.2.1}{4.5} = \dfrac{1}{2}$

Dalam contoh soal di atas, panjang **u** adalah 4, tetapi jika menggunakan hasil kali dalam Euclides, maka didapat 7**u**7=2√2. Karena itu, dengan didefinisikannya hasil kali dalam ini, maka panjang, sudut dan juga jarak menjadi relatif terhadap hasil kali dalam yang digunakan.

Contoh:
Terhadap hasil kali dalam: <**u**, **v**>= $\int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx$ dan jika **u**=1+x, **v**=x+2x^2, hitunglah:

a. Panjang **u** dan panjang **v**
b. Jarak antara **u** dan **v**
c. Cosinus sudut antara **u** dan **v**.

Jawab:

a. Panjang **u** =7**u**7=<**u**,
   u>$^{1/2}$=($\int_{-1}^{1}(1+x)(1+x)dx$)$^{1/2}$=($\int_{-1}^{1}(1+2x+x^2)dx$)$^{1/2}$=($x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^{1}$)$^{1/2}$=
   {(1+1+1/3) - (-1+1-1/3)}$^{1/2}$=(8/3) $^{1/2}$

Panjang **v**=7**v**7=<**v**, **v**>$^{1/2}$=($\int_{-1}^{1}(x+2x^2)(x+2x^2)dx$)$^{1/2}$=

=($\int_{-1}^{1}(x^2+4x^3+4x^4)dx$)$^{1/2}$ = ($\frac{1}{3}x^3+x^4+\frac{4}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}$)$^{1/2}$ = {(1/3 + 1 + 4/5) - (-1/3+1-4/5)}$^{1/2}$=(34/15)$^{1/2}$

b. Jarak antara **u** dan **v**=d(**u**, **v**)= 7**u** - **v**7=<**u-v**, **u-v**>$^{1/2}$=<1-2x^2, 1-2x^2>$^{1/2}$=

($\int_{-1}^{1}(1-2x^2)(1-2x^2)dx$)$^{1/2}$=($\int_{-1}^{1}(1-4x^2+4x^4)dx$)$^{1/2}$ = ($x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}$)$^{1/2}$=

{(1 - 4/3 + 4/5) - (-1 + 4/3 - 4/5)}$^{1/2}$ = (16/15)$^{1/2}$

c. Cosinus sudut antara **u** dan

$$\mathbf{v}=\cos\theta=\frac{<\mathbf{u},\mathbf{v}>}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}=\frac{\int_{-1}^{1}(1+x)(x+2x^2)dx}{\sqrt{\frac{8}{3}}\sqrt{\frac{34}{15}}}=\frac{\int_{-1}^{1}(x+3x^2+2x^3)dx}{\frac{4\sqrt{17}}{3\sqrt{5}}}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}x^2+x^3+\frac{1}{2}x^4\Big|_{-1}^{1}}{\frac{4\sqrt{17}}{3\sqrt{5}}}=\frac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{17}}=\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{17}}$$

Definisi:
Misalkan V ruang hasil kali dalam.
Misalkan **u**, **v**$\in$V, **u** dan **v** disebut saling **ortogonal** jika <**u**, **v**>=0.

Contoh:

Apakah **u**= $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, dan **v**= $\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 3 & -9/8 \end{bmatrix}$ saling ortogonal terhadap hasil kali dalam:

a. <**a**, **b**>=$a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3+4a_4b_4$
b. <**a**, **b**>=$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$
c. <**a**, **b**>=$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+8a_4b_4$

Jawab:
a. <**a**, **b**>=9.5+2.0.(-8)+3.(-3).3+4.4.(-9/8) = 0
b. <**a**, **b**>=9.5+0.(-8)+(-3).3+4.(-9/8)=31,5
c. <**a**, **b**>=9.5+0.(-8)+(-3).3+8.4.(-9/8) = 0

Dari contoh ini, terlihat bahwa **u** dan **v**, hanya ortogonal terhadap hasil kali dalam pada soal a. dan c., tetapi tidak ortogonal terhadap hasil kali dalam b. Karena itu, keortogonalan dua vektor tergantung dari hasil kali dalam yang berlaku di dalam ruang hasil kali dalam tersebut.

Definisi:
Misalkan V ruang hasil kali dalam.
Misalkan W={$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$}$\subseteq$V

Misalkan **v**$\in$ V, **v** disebut **ortogonal pada himpunan** W jika **v** ortogonal pada setiap anggota W atau untuk setiap i=1, 2, ..., n berlaku <$\mathbf{u}_i$, **v**>=0.

Contoh:
Apakah **u**=(2, -1, 0), ortogonal terhadap himpunan W ={**a** = (2, 2, 3), **b** = (3, 3, -1), **c**=(-4,-4, 3)} terhadap hasil kali dalam: <**p**, **q**>= $p_1q_1 + 2q_2p_2 + q_3p_3$?
Jawab:
<**u**, **a**>= 2.2 + 2.(-1).2 + 0.3 = 0
<**u**, **b**>= 2.3 + 2.(-1).3 + 0.(-1) = 0
<**u**, **c**>= 2.(-4) + 2.(-1).(-4) + 0.3 = 0
Jadi, **u** ortogonal terhadap himpunan W.

Definisi:
Misalkan V ruang hasil kali dalam.
Misalkan W={$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$}$\subseteq$V
W disebut **himpunan ortogonal** jika setiap dua anggota W yang berbeda saling ortogonal, atau <$\mathbf{u}_i$,$\mathbf{u}_j$>=0, untuk setiap i$\neq$j, dengan i, j=1, 2, ..., n.

Contoh:
Apakah W={**a**=(-1, 0, 3), **b**=(2, 1, 1), **c**=(1, -7, 1/2)} merupakan himpunan ortogonal terhadap hasil kali dalam:
<**u**, **v**>=$3u_1v_1 + u_2v_2 + 2u_3v_3$?

Jawab:
<**a**, **b**>=3.(-1).2 + 0.1 + 2.3.1 = 0
<**a**, **c**>=3.(-1).1 + 0.(-7) + 2.3.1/2 = 0
<**b**, **c**>=3.2.1 + 1.(-7) + 2.1.1/2 = 0
Jadi, himpunan W himpunan ortogonal.

Latihan:
1. Terhadap hasil kali dalam <**u**, **v**>=$4u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3+2u_4v_4$ untuk **u**, **v** $\in R^4$, jika **a**=(2, -3, 1, 0), **b**=(3, 0, 2, 1), dan **c**=(-1, 1, 0, 3). Hitunglah:
   a. 7**a**7
   b. 7**b**7
   c. 7**c**7
   d. d(**a**, **b**)
   e. d(**a**, **c**)
   f. d(**b**, **c**)
   g. cosinus sudut antara **a** dan **b**
   h. cosinus sudut antara **a** dan **c**
   i. cosinus sudut antara **b** dan **c**
2. Terhadap hasil kali dalam <**p**, **q**>=$a_0b_0+2a_1b_1+a_2b_2$ untuk **p**, **q**$\in P_2$, jika **a**=1+x, **b**=$1-x^2$, dan **c**=$x+x^2$. Hitunglah soal-soal seperti no.1.
3. Terhadap hasil kali dalam <**u**, **v**>=$u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3+u_4v_4$ untuk **u**, **v**$\in M_{2x2}$, jika **a**=$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, **b**=$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, dan **c**=$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$. Hitunglah soal-soal seperti no.1

4. Terhadap hasil kali dalam soal no.1, selidiki apakah **u**=(2, -1, 2, 2) dan **v**=(3,8,2,-5) saling ortogonal?
5. Terhadap hasil kali dalam soal no.2, selidiki apakah **u**=$2+3x-3x^2$ dan **v**=$3+x+4x^2$ saling ortogonal?
6. Terhadap hasil kali dalam soal no.3, selidiki apakah **u**=$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ dan

   v=$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$saling ortogonal?
7. Terhadap hasil kali dalam soal no. 1, no. 2, dan no. 3, untuk ruang vektor yang sesuai, selidiki apakah pasangan vektor dan himpunan vektor di bawah ini ortogonal?
   a. **u** = (2, 3, -1, 2), dan W = {**a** = (1, 2, 2, -3), **b** = (0, 1, 3, 0), **c** = (1, 0, 0, -2), **d**=(2, -4, 4, 0)}
   b. **u**=(3, -2, 3, -2), dan W = { **a**=(0, 4, 0, -2), **b** = (1, 1, 2, 4), **c** = (1, 3, 0, 2), **d**=(2, -4, -4, 5)}
   c. **u**=$2 + 3x – x^2$, dan W={ **a**=$1 + 2x^2$, **b**=$2x + 12x^2$, **c**=$4 + x + 14x^2$}
   d. **u**=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, dan W={ **a**=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$, **b**=$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, **c**=$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, **d**=$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$}
   e. **u**=$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, dan W={ **a**=$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$, **b**=$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, **c**=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, **d**=$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}$}
8. Selidiki manakah himpunan-himpunan di bawah ini yang merupakan himpunan ortogonal, untuk hasil kali dalam Euclides pada R^4?
   a. W={**a**=(0, 2, 3, -3), **b**=(-1, -3, 2, 0)}
   b. W={**a**=(0, 3, 1, -3), **b**=(0, 1, 3, 2), **c**=(1, 0, 0, 0), **d**=(0, 11, -9, 8)}
   c. W={**a**=(1, 0, 2, 2), **b**=(0, 1, 2, -2), **c**=(-16, 0, 4, 4), **d**=(0, 4, -1, 1)}
   d. W={**a**=(1, 2, 0, 1), **b**=(-2, 1, 2, 0), **c**=(2, 0, 1, -1), **d**=(6, -16, 7, 13)}
9. Untuk hasil kali dalam $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>=u_1v_1+u_2v_2+2u_3v_3+2u_4v_4$, manakah himpunan yang ortogonal dari himpunan-himpunan yang terdapat pada soal no.8?
10. Tentukan k, jika diminta pasangan vektor di bawah ini saling ortogonal terhadap hasil kali dalam yang diberikan.
    a. Jika **u**=(2, k, 3) dan **v**=(-1, 2k, k) terhadap hasil kali dalam Euclides.
    b. Jika **u**, dan **v** seperti soal no. 10 a., tetapi hasil kali dalam:
    $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>=u_1v_1+2u_2v_2+4u_2v_2$.
    c. Jika **u**= $5 + kx^2$ dan **v**=$5 - kx^2$, terhadap hasil kali dalam:
    $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$
    d. Jika **u**= $\sqrt{5} + kx^2$ dan **v**=$\sqrt{5} - kx^2$, terhadap hasil kali dalam:
    $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>= \int_0^1 u(x)v(x)dx$

C. Ortonormalisasi

Dalam bidang keteknikan diperlukan basis-basis yang menyederhanakan perhitungan dalam membentuk kombinasi linier dari suatu vektor, untuk itu diperlukan basis ortonormal, sebagaimana dinyatakan dalam definisi di bawah ini:

Definisi:
Misalkan V ruang hasil kali dalam.
W={$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_r$}$\subseteq$V. Himpunan W disebut himpunan **ortonormal**, jika W himpunan ortogonal dan panjang setiap anggota W adalah satu. Atau dalam bentuk lambang, ditulis:

1. $<\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j>=0$, untuk i, j=1, 2, ..r dan i$\neq$j.
2. $\|\mathbf{u}_i\|=1$, untuk setiap i=1, 2, …, r

Contoh:
Jelas, bahwa himpunan basis baku terhadap hasil kali dalam baku pada masing-masing ruang hasil kali dalam merupakan himpunan ortonormal.

Contoh:
Apakah himpunan W={$\mathbf{u}_1=1$, $\mathbf{u}_2=\sqrt{3}\,(1-2x)$, $\mathbf{u}_3=\sqrt{5}(1-6x+6x^2)$} terhadap hasil kali dalam $<\mathbf{p}, \mathbf{q}>= \int_0^1 p(x)q(x)dx$ merupakan himpunan ortonormal?

Jawab:

$<\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2>= \int_0^1 1.\sqrt{3}(1-2x)dx = \sqrt{3}\left(x - x^2\right)\Big|_0^1 =0$

$<\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3>= \int_0^1 1.\sqrt{5}(1-6x+6x^2)dx = \sqrt{5}\left(x - 3x^2 + 2x^3\right)\Big|_0^1 =0$

$<\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3>= \int_0^1 \sqrt{3}(1-2x)\sqrt{5}(1-6x+6x^2)dx = \sqrt{15}\int_0^1 (1-8x+18x^2-12x^3)dx =$

$\sqrt{15}\left(x-4x^2+6x^3-3x^4\right)\Big|_0^1 =0$

Jadi, W himpunan ortogonal.

$\|\mathbf{u}_1\|=<\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1>^{1/2}=(\int_0^1 1.1dx)^{1/2}=(x\Big|_0^1)^{1/2}=1$

$\|\mathbf{u}_2\|=<\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2>^{1/2}=(\int_0^1 \sqrt{3}(1-2x).\sqrt{3}(1-2x)dx)^{1/2}=(3\left(x-2x^2+\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^1)^{1/2}=1$

$\|\mathbf{u}_3\|=<\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3>^{1/2}=(\int_0^1 \sqrt{5}(1-6x+6x^2)\sqrt{5}(1-6x+6x^2)dx)^{1/2}=$

$(5\left(x-6x^2+16x^3-18x^4+\frac{36}{5}x^5\right)\Big|_0^1)^{1/2}=1$

Jadi, W himpunan ortonormal.

Jika dipunyai basis ortonormal, pencarian skalar-skalar pada kombinasi linier suatu vektor terhadap basis ortonormal tersebut menjadi mudah. Untuk melihatnya, perhatikan uraian berikut:

Misalkan W={$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_n$} basis ortonormal dari suatu ruang hasil kali dalam V. Maka setiap vektor di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari W. Misalkan $\mathbf{v}\in$ V, maka terdapat skalar-skalar k_1, k_2, …, k_n, sehingga memenuhi persamaan:
$\mathbf{v}=k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2+ \ldots +k_n\mathbf{u}_n$
Kalikan $\mathbf{v}$ dengan salah satu vektor pada basis W, misalkan $\mathbf{u}_i$ untuk i=1, 2, …, n, sehingga:

$<\mathbf{v}, \mathbf{u}_i> = <k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2+ \ldots+k_n\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_i >$ {*dari aksioma penjumlahan*}
$<\mathbf{v}, \mathbf{u}_i> = <k_1\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i >+<k_2\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_i >+ \ldots+<k_n\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_i>$ {*dari aksioma kehomogenen*}
$<\mathbf{v}, \mathbf{u}_i> = k_1<\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i >+ k_2<\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_i >+ \ldots+k_n<\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_i>$ {*W himpunan ortonormal*}
$<\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i >=0, <\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_i >=0, \ldots, <\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_i >=0, <\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i>=1, <\mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{u}_i >=0, \ldots, <\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_i >=0$
Jadi, $<\mathbf{v}, \mathbf{u}_i> = k_i$
Jadi, $\mathbf{v}=<\mathbf{v}, \mathbf{u}_1>\mathbf{u}_1+<\mathbf{v}, \mathbf{u}_2>\mathbf{u}_2+ \ldots+<\mathbf{v}, \mathbf{u}_n>\mathbf{u}_n$

Contoh:
Jika W={$\mathbf{u}_1=1$, $\mathbf{u}_2=\sqrt{3}\ (1-2x)$, $\mathbf{u}_3=\sqrt{5}(1-6x+6x^2)$} terhadap hasil kali dalam

$$<\mathbf{p}, \mathbf{q}>= \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

merupakan basis ortonormal P_2, tentukan kombinasi linier dari $\mathbf{v}=2 + 6x^2$.

Jawab:

$$k_1=<\mathbf{v}, \mathbf{u}_1>=\int_0^1 \left(2+6x^2\right)1dx = \left(2x+2x^3\right)\Big|_0^1 =4$$

$$k_2=<\mathbf{v}, \mathbf{u}_2>=\int_0^1 \left(2+6x^2\right)\sqrt{3}(1-2x)dx = \sqrt{3}\left(2x-2x^2+2x^3-3x^4\right)\Big|_0^1 =-\sqrt{3}$$

$$k_3=<\mathbf{v}, \mathbf{u}_3>=\int_0^1 \left(2+6x^2\right)\sqrt{5}\left(1-6x+6x^2\right)dx = \sqrt{5}\left(2x-6x^2+6x^3-9x^4+\frac{36}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Jadi, kombinasi linier dari $\mathbf{v}$ terhadap basis W adalah: $\mathbf{v}=4\mathbf{u}_1 - \sqrt{3}\mathbf{u}_2 + \sqrt{5}\mathbf{u}_3/5$

Contoh:
Tentukan kombinasi linier $\mathbf{v}=(2, 3, -1)$, terhadap basis ortonormal W={ $\mathbf{u}_1=(1/2, 0, 1/2)$, $\mathbf{u}_2=(0, -1, 0)$, $\mathbf{u}_3=(1/2, 0, -1/2)$} pada ruang hasil kali dalam: $<\mathbf{a}, \mathbf{b}>= 2a_1b_1+a_2b_2+2a_3b_3$.

Jawab:
$k_1=<\mathbf{v}, \mathbf{u}_1>=2.2.1/2+3.0+2.(-1).1/2 = 1$
$k_2=<\mathbf{v}, \mathbf{u}_2>=2.2.0+3.(-1)+2.(-1).0=-3$
$k_3=<\mathbf{v}, \mathbf{u}_3>=2.2.1/2+3.0+2.(-1).(-1/2)=3$
Jadi, kombinasi linier $\mathbf{v}$ terhadap basis W adalah: $\mathbf{v}=\mathbf{u}_1 -3\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$

Setelah mengetahui kemudahan (keuntungan) jika mempunyai basis ortonormal, maka langkah selanjutnya adalah bagaimana mendapatkan basis ortonormal. Untuk itu, diingatkan kembali tentang proyeksi ortogonal dan komponen vektor yang ortogonal terhadap vektor yang lain. Jika W dibangun oleh sehimpunan vektor ortonormal, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$, maka proyeksi ortogonal $\mathbf{v}$ terhadap W adalah:

$$\text{proy}_W\,\mathbf{v} = <\mathbf{v}, \mathbf{u}_1> \mathbf{u}_1 + < \mathbf{v}, \mathbf{u}_2>\mathbf{u}_2 + \ldots + <\mathbf{v}, \mathbf{u}_r >\mathbf{u}_r.$$

Hal ini dikarenakan $\text{proy}_W\,\mathbf{v}$ terletak di W dan $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ himpunan ortonormal, yang berarti panjang setiap anggota himpunan adalah satu, atau $<\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i>=1$.
Sedangkan komponen $\mathbf{v}$ yang ortogonal terhadap W adalah $\mathbf{v} - \text{proy}_W\mathbf{v}$ atau

$$\mathbf{v} - <\mathbf{v}, \mathbf{u}_1> \mathbf{u}_1 - < \mathbf{v}, \mathbf{u}_2>\mathbf{u}_2 - \ldots - <\mathbf{v}, \mathbf{u}_r >\mathbf{u}_r.$$

Untuk mendapatkan vektor yang panjangnya satu dilakukan proses normalisasi, yaitu dibagi dengan panjang vektornya sendiri atau $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ yang dikenal sebagai vektor satuan $\mathbf{v}$.

Pengubahan basis sembarang menjadi basis ortonormal, menggunakan proses Gram-Schmidt, yaitu:
Misalkan V ruang hasil kali dalam.
Misalkan S={$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$} basis sembarang dari V.
Misalkan B={$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_n$} basis ortonormal dari V yang akan dicari.

1. $\mathbf{u}_1$ adalah vektor satuan $\mathbf{v}_1$:
$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$$
2. $\mathbf{u}_2$ adalah komponen $\mathbf{v}_2$ yang ortogonal terhadap $\mathbf{u}_1$ dan panjangnya satu
$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2 - <\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1> \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{v}_2 - <\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1> \mathbf{u}_1\|}$$
3. $\mathbf{u}_3$ adalah komponen $\mathbf{v}_3$ yang ortogonal terhadap {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$} dan panjangnya satu
$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v}_3 - <\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1> \mathbf{u}_1 - <\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2> \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{v}_3 - <\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1> \mathbf{u}_1 - <\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2> \mathbf{u}_2\|}$$

Langkah ini dapat diteruskan sampai langkah yang ke–n.

n. $\mathbf{u}_n$ adalah komponen $\mathbf{v}_n$ yang ortogonal terhadap {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_{n-1}$} dan panjangnya satu
$$\mathbf{u}_n = \frac{\mathbf{v}_n - <\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_1> \mathbf{u}_1 - <\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_2> \mathbf{u}_2 - \text{K} - <\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_{n-1}> \mathbf{u}_{n-1}}{\|\mathbf{v}_n - <\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_1> \mathbf{u}_1 - <\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_2> \mathbf{u}_2 - \text{K} - <\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_{n-1}> \mathbf{u}_{n-1}\|}$$

Contoh:
Tentukan basis ortonormal dari S={$\mathbf{v}_1$=(1, 0, 1), $\mathbf{v}_2$=(0, 1, 0), $\mathbf{v}_3$=(1, 0, -1)} terhadap hasil kali dalam:
$$<\mathbf{a}, \mathbf{b}> = 2a_1b_1 + 4a_2b_2 + 2a_3b_3$$

Jawab:

1. $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2.1.1 + 4.0.0 + 2.1.1}}$ =(1/2, 0, 1/2)
2. $\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2 - <\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1> \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{v}_2 - <\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1> \mathbf{u}_1\|}$

   $<\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1>$=2.0.1/2 + 4.1.0 + 2.0.1/2 = 0

   $\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{(0,1,0)}{\sqrt{2.0.0 + 4.1.1 + 2.0.0}}$ =(0, 1/2, 0)
3. $\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v}_3 - <\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1> \mathbf{u}_1 - <\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2> \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{v}_3 - <\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1> \mathbf{u}_1 - <\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2> \mathbf{u}_2\|}$

   $<\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1>$=2.1.1/2 + 4.0.0 + 2.(-1).1/2 = 0
   $<\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2>$=2.1.0 + 4.0.1/2 + 2.(-1).0 = 0

   $\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2.1.1 + 4.0.0 + 2.(-1).(-1)}}$ =(1/2, 0, -1/2)

Jadi, basis ortonormalnya adalah { $\mathbf{u}_1$=(1/2, 0, 1/2), $\mathbf{u}_2$=(0, 1/2, 0), $\mathbf{u}_3$= (1/2, 0, -1/2)}

Contoh:
Tentukan basis ortonormal dari S={$\mathbf{u}_1$=1, $\mathbf{u}_2$=1-2x, $\mathbf{u}_3$=1-6x+6x^2} terhadap hasil kali dalam:

$$<\mathbf{p}, \mathbf{q}>= \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

Jawab:

1. $\mathbf{u}_1=\dfrac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}=\dfrac{1}{1}=1$

   7$\mathbf{v}_1$7=$\left(\int_0^1 1.1dx\right)^{1/2}$=1

2. $\mathbf{u}_2=\dfrac{\mathbf{v}_2-<\mathbf{v}_2,\mathbf{u}_1>\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{v}_2-<\mathbf{v}_2,\mathbf{u}_1>\mathbf{u}_1\|}$

   $<\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1>=\int_0^1 (1-2x).1dx = 0$

   $\mathbf{u}_2=\dfrac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}=\dfrac{1-2x}{\sqrt{1/3}}$=√3(1-2x)

   7$\mathbf{v}_2$7=$\left(\int_0^1 (1-2x).(1-2x)dx\right)^{1/2}$=$\left(\int_0^1 (1-4x+4x^2)dx\right)^{1/2}$=$\left(x-2x^2+\dfrac{4}{3}x^3\Big|_0^1\right)^{1/2}$=$\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

3. $\mathbf{u}_3=\dfrac{\mathbf{v}_3-<\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_1>\mathbf{u}_1-<\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_2>\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{v}_3-<\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_1>\mathbf{u}_1-<\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_2>\mathbf{u}_2\|}$

   $<\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1>=\int_0^1 (1-6x+6x^2).1dx=\left(x-3x^2+2x^3\right)\Big|_0^1$=0

   $<\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2>= \int_0^1 \left(1-6x+6x^2\right)\left(1-2x\right)dx=\int_0^1 \left(1-8x+18x^2-12x^3\right)dx=$

   $\left(x-4x^2+6x^3-3x^4\right)\Big|_0^1$=0

   $\mathbf{u}_3=\dfrac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|}=\dfrac{1-6x+6x^2}{\sqrt{1/5}}$=√5(1 - 6x + 6x^2)

   7$\mathbf{v}_3$7=$<\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3>^{1/2}$=$\left(\int_0^1 \left(1-6x+6x^2\right)\left(1-6x+6x^2\right)dx\right)^{1/2}$=

   $\left(\left(x-6x^2+16x^3-18x^4+\dfrac{36}{5}x^5\right)\Big|_0^1\right)^{1/2}$= 7$\mathbf{v}_3$7=$\sqrt{1/5}$

Jadi, basis ortonormalnya adalah { $\mathbf{u}_1$=1, $\mathbf{u}_2$=√3(1-2x), $\mathbf{u}_3$=√5(1 - 6x + 6x^2)}

Dua contoh di atas basis sembarangnya merupakan basis ortogonal, sehingga untuk menjadi basis ortonormal cukup dibagi dengan panjang vektornya sendiri atau diambil vektor satuannya.

Latihan:

1. Terhadap hasil kali dalam $<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = 3u_1v_1 + u_2v_2$ tentukan kombinasi linier dari $\mathbf{a}=(3, -5)$ terhadap basis ortonormal B={$\mathbf{b}_1=(4/7, -1/7)$, $\mathbf{b}_2=(-\sqrt{3}/21, -4\sqrt{3}/7)$}.
2. Terhadap hasil kali dalam Euclides tentukan kombinasi linier dari $\mathbf{a}=(0, -2, 2, 1)$ terhadap basis ortonormal B={$\mathbf{b}_1=(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2,0)$, $\mathbf{b}_2=(0,\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)$, $\mathbf{b}_3=(0,\sqrt{2}/2,0,-\sqrt{2}/2)$, $\mathbf{b}_4=(\sqrt{2}/2,0,-\sqrt{2}/2,0)$}.
3. Terhadap hasil kali dalam $<\mathbf{p}, \mathbf{q}> = a_0b_0 + 2a_1b_1 + 2a_2b_2$ tentukan kombinasi linier dari $\mathbf{a} = -1 + 2x + x^2$ terhadap basis ortonormal B = {$\mathbf{b}_1 = 1$, $\mathbf{b}_2 = ½x + ½x^2$, $\mathbf{b}_3 = ½x - ½x^2$}.
4. Terhadap hasil kali dalam $<\mathbf{p}, \mathbf{q}> = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ tentukan kombinasi linier dari $\mathbf{a}=-1+2x+x^2$ terhadap basis ortonormal B ={$\mathbf{b}_1=1$, $\mathbf{b}_2= \sqrt{3}(3 + 4x - 10x^2)/\sqrt{19}$, $\mathbf{b}_3= \sqrt{5}\,x^2$}.
5. Terhadap hasil kali dalam $<\mathbf{a}, \mathbf{b}> = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$ tentukan kombinasi linier dari $\mathbf{a}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ terhadap basis ortonormal B={$\mathbf{b}_1=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$,
$\mathbf{b}_2=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_4=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$ }.
6. Terhadap hasil kali dalam Euclides, tunjukkan bahwa basis B={$\mathbf{b}_1=(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2,0)$, $\mathbf{b}_2=(0,\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)$, $\mathbf{b}_3=(0,\sqrt{2}/2,0,-\sqrt{2}/2)$, $\mathbf{b}_4=(\sqrt{2}/2,0,-\sqrt{2}/2,0)$} adalah basis ortonormal.
7. Terhadap hasil kali dalam $<\mathbf{p}, \mathbf{q}> = a_0b_0 + 2a_1b_1 + 2a_2b_2$, tunjukkan bahwa B={$\mathbf{b}_1=1$, $\mathbf{b}_2= ½x + ½x^2$, $\mathbf{b}_3= ½x - ½x^2$} merupakan basis ortonormal.
8. Terhadap hasil kali dalam $<\mathbf{a}, \mathbf{b}> = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3 + a_4b_4$, tunjukkan bahwa B={$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$,
$\mathbf{u}_4=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$} merupakan basis ortonormal.
9. Terhadap hasil kali dalam $<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = u_1v_1 + 3u_2v_2 + u_3v_3$ tentukan proyeksi ortogonal vektor $\mathbf{w} = (2, -2, 3)$ terhadap sub ruang yang dibangun oleh {$\mathbf{a}_1=(0, ½, - ½)$, $\mathbf{a}_2=(1, 0, 0)$} dan tentukan pula komponen $\mathbf{w}=(2, -2, 3)$ yang ortogonal terhadap sub ruang yang dibangun oleh { $\mathbf{a}_1=(0, ½, - ½)$, $\mathbf{a}_2=(1, 0, 0)$}
10. Terhadap hasil kali dalam Euclides tentukan proyeksi ortogonal vektor $\mathbf{w}=(2, 1, 3)$ terhadap sub ruang yang dibangun oleh {$\mathbf{a}_1=(4/5, -3/5, 0)$, $\mathbf{a}_2=(-3/5, -4/5, 0)$} dan tentukan pula komponen $\mathbf{w}=(2, 1, 3)$ yang ortogonal terhadap sub ruang yang dibangun oleh { $\mathbf{a}_1=(4/5, -3/5, 0)$, $\mathbf{a}_2=(-3/5, -4/5, 0)$}
11. Terhadap hasil kali dalam $<\mathbf{a}, \mathbf{b}> = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3 + a_4b_4$ tentukan proyeksi ortogonal vektor $\mathbf{w}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ terhadap sub ruang yang dibangun oleh

U={$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$} dan tentukan pula komponen **w** yang ortogonal terhadap sub ruang yang dibangun oleh U.

12. Terhadap hasil kali dalam Euclides, tentukan bahwa basis ortonormal dari B={$\mathbf{b}_1$=(1, 0, 1), $\mathbf{b}_2$=(0,1,1), $\mathbf{b}_3$=(1, 1, 1).
13. Terhadap hasil kali dalam <**a**, **b**>=$2a_1b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$, tentukan bahwa basis ortonormal dari B={$\mathbf{b}_1$=(1, 0, -1), $\mathbf{b}_2$=(0,1,1), $\mathbf{b}_3$=(2, 1, 0).
14. Terhadap hasil kali dalam <**p**, **q**>=$\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$, tentukan bahwa basis ortonormal dari basis sub ruang yang dibangun oleh: {$\mathbf{u}_1$=x+2x^2, $\mathbf{u}_2$=2-x^2}.
15. Terhadap hasil kali dalam <**p**, **q**>=$\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$, tentukan basis ortonormal dari basis ruang vektor baku P_2, yaitu: B={$\mathbf{b}_1$=1, $\mathbf{b}_2$=x, $\mathbf{b}_3$=x^2}.

NILAI DAN VEKTOR EIGEN

A. Nilai dan Vektor Eigen

Permasalahan yang seringkali muncul di dalam dunia teknik adalah masalah peregangan dan pemampatan. Permasalahan ini dalam aljabar linier elementer ini termasuk kelompok transformasi linier lebih khusus lagi adalah masalah operator linier. Transformasi linier dan operator linier yang akan dibahas pada bab berikutnya.

Sedangkan penempatan permasalahan nilai eigen dan vektor eigen pada bab yang lebih awal, dikarenakan lebih mudah dibandingkan dengan transformasi linier. Masalah peregangan dan pemampatan ini, secara formal dinyatakan dalam definisi berikut:

Definisi:
Misalkan A matrik berordo nxn, vektor $\mathbf{x} \in R^n$ dan $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, disebut vektor eigen, jika terdapat bilangan riil λ, yang disebut nilai eigen , sehingga memenuhi persamaan:

$$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$$

Dari definisi di atas dapat diketahui persyaratan-persyaratan untuk nilai eigen maupun vektor eigen. Nilai eigen λ merupakan bilangan riil, yang berarti dapat bernilai nol, negatif dan juga positif, sedangkan vektor eigen **x** merupakan anggota dari R^n untuk A_{nxn} dan **x** *bukan* vektor nol.

Pencarian nilai eigen

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}=\mathbf{o}$$

Dengan mengingat, bahwa A berordo nxn dan **x** berordo nx1, maka dengan mengalikan dengan matrik identitas I yang berordo nxn, maka persamaan di atas dapat ditulis, sebagai:

$$A\mathbf{x} - \lambda I\mathbf{x}=\mathbf{o}$$

Atau

$$(A - \lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{o},$$

dengan mengingat vektor eigen $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, maka persamaan di atas harus mempunyai solusi tak trivial, dan oleh karena itu, maka

$$\det(A - \lambda I)=0$$

Persamaan $\det(A - \lambda I)=0$ dikenal sebagai **persamaan karakteristik** atau biasa pula disebut **persamaan penolong**, karena menolong menyederhanakan permasalahan pencarian nilai eigen menjadi lebih sederhana, yaitu hanya sekedar mencari akar-akar dari polinom $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$.

Sedangkan metode pencarian akar-akar persamaan yang telah diketahui, diantaranya:

1. Pemfaktoran
2. Rumus ABC (jika persamaan kuadrat)
3. Pembagian sintetis

Contoh:

Tentukan nilai-nilai eigen dari:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\det(A - \lambda I)=\det(\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}) = \begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1=(\lambda^2 - 4\lambda + 3) + 1 =$$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 =(\lambda-2)(\lambda-2)=0$, berarti $\lambda_{1,2} =2$

Jadi, nilai-nilai eigen untuk A adalah: $\{\lambda_{1,2} =2\}$

$$\det(B - \lambda I)=\det(\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 5\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 3 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 5\\ 3 & 3-\lambda\end{vmatrix} =$$

$=(2-\lambda)(\lambda^2 -4\lambda-12)= (2-\lambda)(\lambda-6)(\lambda+2)=0$, berarti $\lambda_1 =2$, $\lambda_2 =6$, $\lambda_3 =-2$.

Jadi, nilai-nilai eigen untuk B adalah: $\{\lambda_1 =2, \lambda_2 =6, \lambda_3 =-2\}$

$$\det(C - \lambda I)=\det(\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}) = \begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) + 2 =\lambda^2 -2\lambda+3=0,$$

berarti $\lambda_1 = 1+i\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1-i\sqrt{2}$.

Jadi, dikarenakan tidak ada λ yang bernilai riil, maka C **tidak** mempunyai nilai eigen.

Pencarian vektor eigen

Dengan memperhatikan bentuk $(A - \lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{o}$, berarti pencarian vektor eigen suatu matrik ekivalen dengan mencari solusi tak trivial sistem persamaan linier homogen, atau menentukan ruang solusi dari sistem persamaan linier homogen. Karena itu mencari vektor eigen berarti pula mencari basis untuk ruang solusi untuk nilai eigen tertentu.

Contoh:

Tentukan vektor-vektor eigen dari:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

Jawab:

Untuk matrik A, telah didapat nilai eigen: $\{\lambda_{1,2} =2\}$

Berarti untuk $\lambda_{1,2} =2$, terbentuk sistem persamaan linier homogen $(A - 2I)\mathbf{x}=\mathbf{o}$, sehingga

$$\left(\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \text{ atau } \begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \text{ atau matrik lengkapnya:}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} b_2 + b_1 \sim \begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \text{ atau } -x_1 - x_2 = 0 \text{ atau } x_1 = -x_2 \text{ atau } x_1 = -t$$

Berarti ruang eigen untuk $\lambda_{1,2} =2$ adalah: $\{(-t, t) \mid t\neq 0, t\in R\}$ dengan basis: $\{(-1, 1)\}$

Jadi, vektor eigen untuk $\lambda_{1,2} =2$ adalah: $\{(-1, 1)\}$

Untuk matrik B, telah didapat nilai-nilai eigen: $\{\lambda_1 =2, \lambda_2 =6, \lambda_3 =-2\}$

Berarti untuk $\lambda_1 =2$, terbentuk sistem persamaan linier homogen $(B - 2I)\mathbf{x}=\mathbf{o}$, sehingga

$$\left(\begin{bmatrix}1&0&5\\0&2&0\\3&0&3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \text{ atau } \begin{bmatrix}-1&0&5\\0&0&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

atau matrik lengkapnya:

$$\begin{bmatrix}-1&0&5&0\\0&0&0&0\\3&0&1&0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ b_3+3b_1\end{array} \sim \begin{bmatrix}-1&0&5&0\\0&0&0&0\\0&0&16&0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \frac{1}{16}b_3\end{array} \sim \begin{bmatrix}-1&0&5&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{array}{l}b_1-5b_3\\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

atau $-x_1=0$, $x_2=t$, $x_3=0$, berarti ruang eigen untuk $\lambda_1=2$, adalah: $\{(0, t, 0) \mid t\neq 0, t\in R\}$.
Jadi, vektor eigen untuk $\lambda_1=2$, adalah: $\{(0, 1, 0)\}$

Untuk $\lambda_2=6$, terbentuk sistem persamaan linier homogen (B - 6I)**x**=**o**, sehingga

$$\left(\begin{bmatrix}1&0&5\\0&2&0\\3&0&3\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \text{ atau } \begin{bmatrix}-5&0&5\\0&-4&0\\3&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

atau matrik lengkapnya:

$$\begin{bmatrix}-5&0&5&0\\0&-4&0&0\\3&0&-3&0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\frac{-1}{5}b_1\\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&-4&0&0\\3&0&-3&0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ b_3-3b_1\end{array} \sim \begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&-4&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \frac{-1}{4}b_2\\ \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

atau $x_1 - x_3 = 0$, $x_2=0$ atau $x_1 = x_3$, $x_2=0$ atau solusi sistem persamaan linier homogen adalah: $x_1 = s$, $x_2=0$, $x_3 = s$, berarti ruang eigen untuk $\lambda_2=6$, adalah: $\{(s, 0, s) \mid s\neq 0, s\in R\}$.
Jadi, vektor eigen untuk $\lambda_2=6$, adalah: $\{(1, 0, 1)\}$.

Untuk $\lambda_3=-2$, terbentuk sistem persamaan linier homogen (B + 2I)**x**=**o**, sehingga

$$\left(\begin{bmatrix}1&0&5\\0&2&0\\3&0&3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \text{ atau } \begin{bmatrix}3&0&5\\0&4&0\\3&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

atau matrik lengkapnya:

$$\begin{bmatrix}3&0&5&0\\0&4&0&0\\3&0&5&0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ b_3-b_1\end{array} \sim \begin{bmatrix}3&0&5&0\\0&4&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

atau $3x_1 + 5x_3 = 0$, $4x_2=0$ atau $x_1 = -5/3\ x_3$, $x_2=0$ atau solusi sistem persamaan linier homogen adalah: $x_1= -5r$, $x_2=0$, $x_3 =3r$, berarti ruang eigen untuk $\lambda_3 =-2$, adalah: $\{(-5r, 0, 3r) \mid r\neq 0, r\in R\}$.
Jadi, vektor eigen untuk $\lambda_3 =-2$, adalah: $\{(-5, 0, 3)\}$.

Jadi, vektor-vektor eigen untuk matrik B adalah: $\{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (-5, 0, 3)\}$.

Untuk matrik C, karena tidak ada nilai eigen, maka matrik C juga tidak mempunyai vektor eigen.

Latihan:

1. Tentukan persamaan karakteristik dari matrik berikut:
   a. $A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
   b. $A=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$
   c. $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
   d. $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
   e. $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

2. Tentukan nilai eigen dari persamaan karakteristik berikut:
   a. $\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$
   b. $\lambda^3 -4\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$
   c. $(3 - \lambda)(\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda) = 0$
   d. $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$
   e. $(2 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0$

3. Tentukan nilai-nilai eigen, jika ada, dari matrik berikut:
   a. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, b≠0

f. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

h. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

4. Tentukan vektor-vektor eigen, jika ada, dari matrik-matrik pada soal no. 3.
5. Tentukan nilai dan vektor eigen dari matrik berikut:

a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

f. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

6. Dengan menggunakan diskriminan persamaan kuadrat, tunjukkan bahwa matrik $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$:
   a. mempunyai dua nilai eigen, jika $(a\text{-}d)^2 + 4bc > 0$
   b. mempunyai satu nilai eigen, jika $(a\text{-}d)^2 + 4bc = 0$
   c. tidak mempunyai nilai eigen, jika $(a\text{-}d)^2 + 4bc < 0$
7. Tentukan syarat agar matrik $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mempunyai nilai eigen bilangan bulat.
8. Tunjukkan bahwa nilai eigen matrik A+B adalah nilai eigen A + nilai eigen B, jika A=$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ dan B=$\begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$

B. Diagonalisasi

Definisi: Misalkan matrik A berordo nxn, disebut dapat didiagonalisasi, jika terdapat matrik P_{nxn}, sehingga perkalian tiga matrik $P^{-1}AP$ merupakan matrik diagonal.

Untuk menjamin suatu matrik dapat didiagonalisasi menggunakan teorema berikut:

Teorema: Matrik A_{nxn} dapat didiagonalisasi jika dan hanya jika mempunyai n vektor eigen yang bebas linier.

Bukti:
Jika dimiliki Matrik A yang dapat didiagonalisasi, akan ditunjukkan bahwa A mempunyai n vektor eigen yang bebas linier.

A dapat didiagonalisasi, berarti ada matrik P yang mempunyai invers sehingga $P^{-1}AP$ merupakan matrik diagonal, misalkan $P^{-1}AP=D$, berarti AP=PD.

Misalkan A=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, P=$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$, dan

D=$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$.

Vektor-vektor kolom matrik AP dapat ditulis: $A\mathbf{p}_1$, $A\mathbf{p}_2$, …, $A\mathbf{p}_n$, dimana $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, …, $\mathbf{p}_n$ vektor-vektor kolom matrik P. Sedangkan vektor-vektor kolom matrik PD dapat ditulis:

$\lambda_1\mathbf{p}_1$, $\lambda_2\mathbf{p}_2$, …, $\lambda_n\mathbf{p}_n$. Karena AP=PD, maka kolom-kolom AP juga sama dengan kolom-kolom PD, sehingga didapat persamaan-persamaan: $A\mathbf{p}_1=\lambda_1\mathbf{p}_1$, $A\mathbf{p}_2=\lambda_2\mathbf{p}_2$, …, $A\mathbf{p}_n=\lambda_n\mathbf{p}_n$. Karena P mempunyai invers, berarti det(P)≠0, maka vektor-vektor $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, …, $\mathbf{p}_n$ bebas linier, berarti juga vektor-vektor $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, …, $\mathbf{p}_n$ tak ada yang berupa vektor nol, karena itu $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, …, $\mathbf{p}_n$ merupakan vektor-vektor eigen dan λ_1, λ_2, …, λ_n merupakan nilai eigen yang saling bersesuaian.
Jadi, jika A dapat didiagonalisasi terdapat n vektor eigen yang bebas linier.

Jika A mempunyai n vektor eigen yang bebas linier, akan ditunjukkan bahwa A dapat didiagonalisasi.
Jika A mempunyai n vektor eigen yang bebas linier, berarti didapat persamaan-persamaan: $A\mathbf{p}_1=\lambda_1\mathbf{p}_1$, $A\mathbf{p}_2=\lambda_2\mathbf{p}_2$, …, $A\mathbf{p}_n=\lambda_n\mathbf{p}_n$, dimana $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, …, $\mathbf{p}_n$ vektor-vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen A λ_1, λ_2, …, λ_n. Dari persamaan yang telah didapat dibentuk matrik yang menempatkan setiap persamaan sebagai vektor-vektor kolomnya, sehingga didapat matrik $[A\mathbf{p}_1 \approx A\mathbf{p}_2 \approx \equiv \approx A\mathbf{p}_n]$ dan matrik $[\lambda_1\mathbf{p}_1 \approx \lambda_2\mathbf{p}_2 \approx \equiv \approx \lambda_n\mathbf{p}_n]$, karena setiap kolom kedua matrik ini sama, maka didapat persamaan matrik $[A\mathbf{p}_1 \approx A\mathbf{p}_2 \approx \equiv \approx A\mathbf{p}_n]=[\lambda_1\mathbf{p}_1 \approx \lambda_2\mathbf{p}_2 \approx \equiv \approx \lambda_n\mathbf{p}_n]$, jika dibentuk matrik $P=[\mathbf{p}_1 \approx \mathbf{p}_2 \approx \equiv \approx \mathbf{p}_n]$ dan D matrik diagonal yang pada diagonal utamanya berisi λ_1, λ_2, …, λ_n, maka terbentuklah persamaan matrik AP=PD, karena vektor-vektor kolom P bebas linier, berarti det(P)≠0 atau P mempunyai invers, sehingga didapat persamaan matrik $P^{-1}AP=D$.
Jadi, A dapat didiagonalisasi.

Dari bukti di atas didapat langkah-langkah untuk mendiagonalisasi matrik A_{nxn}, yaitu:

1. Tentukan nilai-nilai eigen, misalkan λ_1, λ_2, …, λ_k dimana k≤n
2. Berdasarkan nilai-nilai eigen pada langkah 1, tentukan vektor-vektor eigen A, misalkan dimana $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, …, $\mathbf{p}_n$, jika vektor eigen yang didapat kurang dari n berarti A tidak dapat didiagonalisasi dan langkah selanjutnya tidak perlu dilakukan.
3. Bentuk matrik P dengan menempatkan vektor-vektor eigen sebagai vektor kolomnya, $P=[\mathbf{p}_1 \approx \mathbf{p}_2 \approx \equiv \approx \mathbf{p}_n]$
4. Matrik diagonal $P^{-1}AP$, merupakan matrik diagonal yang diagonal utamanya adalah λ_1, λ_2, …, λ_n.

Contoh:
Apakah matrik-matrik di bawah ini dapat didiagonalisasi? Jika dapat, tentukan matrik P dan matrik diagonalnya:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab:
Nilai eigen matrik A adalah akar dari persamaan karakteristik: det(A-λI)=0, sedangkan

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2 = 0, \text{ sehingga } \lambda_{1,\,2}= 1.$$

Vektor eigen matrik A adalah basis ruang solusi SPL homogen: $(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{o}$ untuk nilai eigen λ tertentu.

Untuk λ=1, didapat SPL homogen:

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, sehingga $3x_1=0$ dan $x_2=t$, sehingga untuk nilai eigen λ=1, didapat vektor eigen:

$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, karena vektor eigen A hanya 1 sedangkan ordo A 2x2, maka matrik A tidak dapat didiagonalisasi.

Nilai eigen matrik B adalah akar dari persamaan karakteristik: det(B-λI)=0, sedangkan det(B - λI)= $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$ =(4 - λ)$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$ =(4 - λ)(λ^2 - 4λ)=0, sehingga $\lambda_{1,2}$= 4, λ_3= 0.

Vektor eigen matrik B adalah basis ruang solusi SPL homogen: (B -λI)**x**=**o** untuk nilai eigen λ tertentu.

Untuk $\lambda_{1,2}$= 4, didapat SPL homogen:

$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, sehingga $x_1 - x_2=0$ dan $x_3=t$, atau x_1 =s, x_2=s dan x_3=t,

sehingga untuk nilai eigen $\lambda_{1,2}$= 4, didapat vektor-vektor eigen: $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Untuk λ_3 = 0, didapat SPL homogen:

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, sehingga $x_1 + x_2=0$ dan $4x_3=0$, atau x_1 =-r, x_2=r dan x_3=0,

sehingga untuk nilai eigen λ_3= 0, didapat vektor eigen: $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Karena vektor eigen B ada 3 yang bebas linier (*tunjukkan!*), sedangkan ordo B 3x3, maka matrik B dapat didiagonalisasi.

Dengan P= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan matrik diagonal $P^{-1}AP$= $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, jika kolom-kolom matrik P diubah menjadi P= $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka matrik diagonal $P^{-1}AP$= $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Nilai eigen matrik C adalah akar dari persamaan karakteristik: det(C-λI)=0, sedangkan det(C-λI)=$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ =(2 - λ)(1 - λ) – 6 = λ^2 -3λ - 4=(λ + 1)(λ - 4)=0, sehingga λ_1= -1, λ_2=4.
Vektor eigen matrik C adalah basis ruang solusi SPL homogen: (C-λI)**x**=**o** untuk nilai eigen λ tertentu.

Untuk λ_1= -1, didapat SPL homogen:
$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, sehingga didapat $x_1 + x_2 = 0$, atau $x_1= -x_2$, atau x_1=-t, x_2= t, sehingga untuk nilai eigen λ_1= -1, didapat vektor eigen: $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Untuk λ_2= 4, didapat SPL homogen:
$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, sehingga didapat $-2x_1 + 3x_2 = 0$, atau $x_1 = 3x_2/2$, atau x_1=3s, x_2=2s, sehingga untuk nilai eigen λ_2= 4, didapat vektor eigen: $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Karena vektor eigen C ada 2 sedangkan ordo C 2x2, maka matrik C dapat didiagonalisasi.

Dengan P=$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan matrik diagonal $P^{-1}AP$=$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Latihan:
1. Apakah matrik-matrik dibawah ini dapat didiagonalisasi? Jika dapat, tentukan P dan matrik diagonal $P^{-1}AP$.
   a. A=$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
   b. A=$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
   c. A=$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
   d. A=$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$
   e. A=$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

f. A=$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

g. A=$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

h. A=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

i. A=$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

j. A=$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

k. A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. Tentukan syarat untuk b, sehingga $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$ dapat didiagonalisasi, tentukan pula matrik P dan matrik diagonalnya.
3. Jika matrik $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ mempunyai nilai eigen λ_1=0 dan λ_2=3, tentukan a dan b. Juga tentukan matrik P sehingga matrik diagonalnya $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
4. Apakah matrik $\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$ dengan a sembarang bilangan riil dapat didiagonalisasi? Jika dapat, tentukan matrik P dan matrik diagonalnya.
5. Tunjukkan bahwa $(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P$, bagaimanakah dengan persamaan $(P^{-1}AP)^k =$ $=P^{-1}A^kP$, dengan k bilangan asli, benarkah?
6. Hasil dari no. 5, berarti $A^k=PD^kP^{-1}$, dimana $D=P^{-1}AP$, gunakan hasil ini untuk menghitung: A^4, jika A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
7. Tentukan syarat agar matrik $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dapat didiagonalisasi.

C. Diagonalisasi Ortogonal

Definisi: Matrik A_{nxn} disebut matrik simetri, jika memenuhi: A^t=A.

Contoh:

Matrik A=$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & \boxed{5} \\ -2 & \boxed{5} & 4 \end{bmatrix}$ adalah matrik simetri.

Definisi: Matrik A_{nxn} disebut matrik ortogonal jika $A^{-1}=A^t$.

Contoh:

Apakah matrik-matrik di bawah ini matrik ortogonal? Jelaskan

A=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$

Jawab:

A^{-1}=$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ dan A^t=$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Jadi, matrik A bukan matrik ortogonal.

Tetapi matrik B adalah matrik ortogonal, karena A^{-1}=$\begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$ dan A^t=$\begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$

Matrik ortogonal mempunyai sifat:

1. Vektor-vektor kolomnya membentuk himpunan ortonormal terhadap hasil kali dalam Euclides
2. Vektor-vektor barisnya membentuk himpunan ortonormal terhadap hasil kali dalam Euclides.

Definisi: Matrik A_{nxn} disebut dapat didiagonalisasi secara ortogonal, jika terdapat matrik P yang ortogonal, sehingga $P^{-1}AP = P^tAP$ merupakan matrik diagonal.

Untuk mendapatkan syarat matrik yang dapat didiagonalisasi secara ortogonal, perhatikan uraian berikut:

Misalkan A_{nxn} dapat didiagonalisasi secara ortogonal, maka berlaku:

$P^{-1}AP=P^tAP=D$ atau $AP=PD$ atau $A=PDP^{-1}=PDP^t$.

$A^t=(PDP^t)^t=(P^t)^tD^tP^t=PDP^t=A$

Jadi, matrik A simetri.

Pada sisi yang lain: jika A matrik simetri, apakah A dapat didiagonalisasi secara ortogonal? Bukti ini tidak diberikan pada buku ini.

Kenyataan di atas disimpulkan dalam teorema berikut:

Teorema: A_{nxn} matrik yang dapat didiagonalisasi secara ortogonal jika dan hanya jika A matrik simetri

Langkah-langkah diagonalisasi ortogonal matrik simetri A_{nxn} :

1. Tentukan nilai-nilai eigen matrik A, misalkan: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, dimana $k \leq n$.
2. Tentukan vektor-vektor eigen A, misalkan: $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.
3. Lakukan proses Gram-Schmidt menggunakan hasil kali titik untuk mendapatkan vektor-vektor eigen yang ortonormal, misalkan menjadi: $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$
4. Bentuklah matrik $P = [\mathbf{p}_1 \approx \mathbf{p}_2 \approx \ldots \approx \mathbf{p}_n]$ dan matrik diagonal yang entri-entri pada diagonal utama nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan vektor eigen pada kolom P.

Contoh:

Tentukan matrik P ortogonal dari matrik-matrik di bawah ini:

(a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $C=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

Jawab:

Nilai eigen matrik A adalah akar persamaan karakteristik: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, yaitu: $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = -1$.

Vektor eigen matrik A adalah basis dari ruang solusi SPL homogen

$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, yaitu:

$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ untuk nilai eigen $\lambda_1 = 3$ dan $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ untuk nilai eigen $\lambda_2 = -1$.

Vektor-vektor eigen yang ortonormal didapat dengan melakukan proses Gram-Schmidt terhadap hasil kali dalam Euclides, yaitu:

$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ dan $\vec{p}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, sehingga $P=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ dan $P^tAP=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Nilai eigen matrik B adalah akar persamaan karakteristik: $(1 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$, yaitu: $\lambda_{1,2} = 1$ dan $\lambda_3 = 3$.

Vektor eigen matrik B adalah basis dari ruang solusi SPL homogen

$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, yaitu:

$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ untuk nilai eigen $\lambda_{1,2} = 1$ dan

$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ untuk nilai eigen $\lambda_3 = 3$.

Vektor-vektor eigen yang ortonormal didapat dengan melakukan proses Gram-Schmidt terhadap hasil kali dalam Euclides, yaitu:

$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, dan $\vec{p}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, sehingga P= $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ dan

$P^tAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Matrik C tidak mempunyai P matrik ortogonal, karena C bukan matrik simetri.

Latihan:

Apakah matrik-matrik di bawah ini, dapat didiagonalisasi secara ortogonal? Jika dapat, tentukan matrik P yang ortogonal:

1. A= $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
2. A= $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$
3. A= $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
4. A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
5. A= $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
6. A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
7. A= $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

8. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & \sqrt{20} \\ 0 & \sqrt{20} & 1 \end{bmatrix}$

9. $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

10. $A=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{bmatrix}$

TRANSFORMASI LINIER

A. Pengertian

Pemetaaan F dari ruang vektor V ke ruang vektor W, berarti setiap anggota V dikaitkan dengan tepat satu anggota di W. V disebut domain dan W disebut kodomain. Anggota W, misalkan $\mathbf{y} \in W$, yang mempunyai kaitan dengan anggota V, misalkan $\mathbf{x} \in V$, melalui pemetaan F, atau ditulis $\mathbf{y}=F(\mathbf{x})$ disebut peta dari **x**, sedangkan **x** disebut prapeta dari **y**.

Misalkan F pemetaan dari R^3 ke R^2 dengan rumus:

$$F(x, y, z)=(x + 2y, 2x - 3z)$$

Maka (0, 1, -1) adalah prapeta dari (2, 3), karena F(0, 1, -1)=(2, 3).

Himpunan bagian dari W yang semua anggotanya mempunyai prapeta di V disebut daerah nilai atau daerah jangkauan atau range, secara formal dilambangkan $R(F)=\{\mathbf{y} \in W \mid \exists\ \mathbf{x} \in V, \ni \mathbf{y} = F(\mathbf{x})\}$.

Bentuk khusus dari pemetaan yang dibahas pada bab ini adalah transformasi linier, yaitu pemetaan dari satu ruang vektor ke ruang vektor yang lain yang memenuhi aksioma kelinieran. Transformasi linier banyak dipakai dalam bidang-bidang yang lain, seperti: ekonomi, fisika, keteknikan, dll. Khusus untuk informatika banyak dipakai dalam bidang citra (*image*).

Definisi:
Misalkan V dan W ruang vektor.
Fungsi (Pemetaan) dari V ke W, F: V→ W, disebut transformasi linier, jika memenuhi dua aksioma, berikut:

a. $F(\mathbf{u} + \mathbf{v})=F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$, untuk setiap **u** dan **v** anggota V.
b. $F(k\mathbf{u})=kF(\mathbf{u})$, untuk setiap u anggota V dan setiap *k* skalar (dalam buku ini *k* anggota bilangan riil)

Kedua aksioma di atas dapat disingkat menjadi satu aksioma berikut:

c. $F(k\mathbf{u} + l\mathbf{v})=kF(\mathbf{u}) + lF(\mathbf{v})$, untuk setiap **u** dan **v** anggota V dan untuk setiap *k*, dan *l* skalar.

Contoh:
Apakah fungsi F(x, y, z)=(x + 2y, 2x – 3z) merupakan transformasi linier?

Jawab:
Fungsi di atas merupakan fungsi dari R^3 ke R^2. Untuk menunjukkan F transformasi linier, maka ambil anggota dari R^3 yang berbentuk umum, sehingga memenuhi aksioma kelinieran.

a. Ambil $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^3$, misalkan $\mathbf{u}=(x_1, y_1, z_1)$ dan $\mathbf{v}=(x_2, y_2, z_2)$, dengan mengingat aturan penjumlahan vektor $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(x_1+ x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$, maka nilai fungsi **u**+**v** adalah:
$F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = ((x_1+ x_2) + 2(y_1 + y_2), 2(x_1+ x_2) – 3(z_1 + z_2))$ {*definisi fungsi*}
$F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (x_1+ x_2 + 2y_1 + 2y_2, 2x_1+ 2x_2 – 3z_1 – 3z_2)$ {*sifat distributif bilangan riil*}

F(**u** + **v**) = (($x_1 + 2y_1$) + ($x_2 + 2y_2$), ($2x_1 - 3z_1$) + ($2x_2 - 3z_2$)) {*sifat asosiatif bilangan riil*}

F(**u** + **v**) = ($x_1 + 2y_1$, $2x_1 - 3z_1$) + ($x_2 + 2y_2$, $2x_2 - 3z_2$) {*aturan penjumlahan vektor*}

F(**u** + **v**) = F(**u**) + F(**v**) {*definisi fungsi*}

b. Ambil **u** $\in R^3$, dan ambil *k* skalar, maka dengan mengingat perkalian vektor dengan skalar, *k***u**=(kx_1, ky_1, kz_1), maka nilai fungsi *k***u** adalah:

F(*k***u**) = ($kx_1 + 2ky_1$, $2kx_1 - 3kz_1$) {*definisi fungsi*}

F(*k***u**) = ($k(x_1 + 2y_1)$, $k(2x_1 - 3z_1)$) {*sifat distributif bilangan riil*}

F(*k***u**) = $k(x_1 + 2y_1, 2x_1 - 3z_1)$ {*aturan perkalian vektor dengan skalar*}

F(*k***u**) = *k*F(**u**) {*definisi fungsi*}

Jadi, fungsi yang diberikan di atas termasuk transformasi linier.

Contoh:

Apakah fungsi F(x, y) = 2 + 3x – y merupakan transformasi linier?

Jawab:

Contoh penyangkal: **u** = (2, 3), *k* = 5, maka

F(*k***u**) = F(10, 15) = 2 + 3.10 – 15 = 17

Tetapi *k*F(**u**) = 5F(2, 3) = 5(2 + 3.2 – 3) = 25

Jadi, fungsi yang diberikan di atas bukan transformasi linier.

Contoh:

Misalkan A matrik berordo m x n yang tetap. Maka fungsi T(**x**)=A**x** , dimana **x**$\in R^n$, merupakan transformasi linier.

Karena misalkan $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in R^n$, maka

$T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2)$.

Dan yang kedua, misalkan $\mathbf{x}_1 \in R^n$, dan *k* skalar, maka

$T(k\mathbf{x}_1) = A(k\mathbf{x}_1) = k(A\mathbf{x}_1) = kT(\mathbf{x}_1)$.

Transformasi linier yang demikian disebut transformasi perkalian matrik atau biasa dikenal sebagai transformasi matrik. Setiap Transformasi Linier dari R^n ke R^m, dapat dinyatakan sebagai transformasi matrik.

Contoh:

Dibentuk fungsi T: $P_2 \longrightarrow P_3$ dengan rumus $T(a + bx + cx^2) = x(a + bx + cx^2)$, apakah fungsi ini merupakan transformasi linier?

Jawab:

1. Ambil **p** = $a_1 + b_1x + c_1x^2$ dan **q** = $a_2 + b_2x + c_2x^2$ anggota P_2, maka

   T(**p** + **q**) = T(($a_1 + b_1x + c_1x^2$) + ($a_2 + b_2x + c_2x^2$)) {*definisi penjumlahan polinom*}

   T(**p** + **q**) = x(($a_1 + b_1x + c_1x^2$) + ($a_2 + b_2x + c_2x^2$)) {*definisi fungsi*}

   T(**p** + **q**) = x($a_1 + b_1x + c_1x^2$) + x($a_2 + b_2x + c_2x^2$) {*sifat distributif polinom*}

   T(**p** + **q**) = T(**p**) + T(**q**). {*definisi fungsi*}

2. Ambil **p** = $a_1 + b_1x + c_1x^2$ anggota P_2, dan *k* skalar, maka

T(k**p**) = T(k($a_1 + b_1x + c_1x^2$)) {*definisi perkalian skalar dengan polinom*}
T(k**p**) = x(k($a_1 + b_1x + c_1x^2$)) {*definisi fungsi*}
T(k**p**) = k(x($a_1 + b_1x + c_1x^2$)) {*sifat distributif polinom*}
T(k**p**) = kT(**p**). {*definisi fungsi*}

Jadi, T termasuk transformasi linier.

Contoh:

Dibentuk fungsi T: $M_2 \longrightarrow M_3$ dengan rumus:

$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & 0 & c+d \\ 0 & a-b & 0 \\ c+d & 0 & a+b \end{bmatrix}$ apakah T termasuk trnasformasi linier?

Jawab:

1. Ambil $\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ anggota M_2, maka $\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$

   $= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$, berarti:

   $T(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) = T\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}\right) =$

   $$= \begin{bmatrix} (a_1+a_2)+(b_1+b_2) & 0 & (c_1+c_2)+(d_1+d_2) \\ 0 & (a_1+a_2)-(b_1+b_2) & 0 \\ (c_1+c_2)+(d_1+d_2) & 0 & (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \end{bmatrix}$$

   {*definisi fungsi*}

   $$= \begin{bmatrix} (a_1+b_1)+(a_2+b_2) & 0+0 & (c_1+d_1)+(c_2+d_2) \\ 0+0 & (a_1-b_1)+(a_2-b_2) & 0+0 \\ (c_1+d_1)+(c_2+d_2) & 0+0 & (a_1+b_1)+(a_2+b_2) \end{bmatrix}$$

   {*sifat asosiatif bil. riil*}

   $$= \begin{bmatrix} (a_1+b_1) & 0 & (c_1+d_1) \\ 0 & (a_1-b_1) & 0 \\ (c_1+d_1) & 0 & (a_1+b_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_2+b_2) & 0 & (c_2+d_2) \\ 0 & (a_2-b_2) & 0 \\ (c_2+d_2) & 0 & (a_2+b_2) \end{bmatrix}$$

   {*sifat penjumlahan matrik*}

   T($\mathbf{m}_1$+ $\mathbf{m}_2$) = T($\mathbf{m}_1$) + T($\mathbf{m}_2$) {*definisi fungsi*}

2. Ambil $\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ anggota M_2 dan k skalar, maka $k\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix}$, berarti

   $T(k\mathbf{m}_1) = \begin{bmatrix} ka_1 + kb_1 & 0 & kc_1 + kd_1 \\ 0 & ka_1 - kb_1 & 0 \\ kc_1 + kd_1 & 0 & ka_1 + kb_1 \end{bmatrix}$ {*definisi fungsi*}

$$= \begin{bmatrix} k(a_1+b_1) & 0 & k(c_1+d_1) \\ 0 & k(a_1-b_1) & 0 \\ k(c_1+d_1) & 0 & k(a_1+b_1) \end{bmatrix}$$ {*sifat distributif bilangan riil*}

$$= k\begin{bmatrix} a_1+b_1 & 0 & c_1+d_1 \\ 0 & a_1-b_1 & 0 \\ c_1+d_1 & 0 & a_1+b_1 \end{bmatrix}$$ {*sifat perkalian skalar-matrik*}

$T(k\mathbf{m}_1) = kT(\mathbf{m}_1)$ {*definisi fungsi*}

Jadi, T termasuk transformasi linier.

Contoh:

Didefinisikan fungsi T: $M_2 \rightarrow P_2$ dengan rumus:

$$T\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right) = 2a_1 + a_2 + (2a_2 - 3a_3)x + (a_1 + a_4)x^2$$

Apakah fungsi di atas termasuk transformasi linier?

Jawab:

1. Ambil $\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$ anggota M_2, maka

   $\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 \\ b_3+c_3 & b_4+c_4 \end{bmatrix}$

   $T(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) = T\left(\begin{bmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 \\ b_3+c_3 & b_4+c_4 \end{bmatrix}\right) =$

   $= 2(b_1+c_1)+(b_2+c_2) + (2(b_2+c_2)-3(b_3+c_3))x + ((b_1+c_1)+(b_4+c_4))x^2$
   {*definisi fungsi*}

   $= (2b_1+ b_2)+(2c_1+c_2) + ((2b_2 - 3b_3)+(2c_2 -3c_3))x + ((b_1+ b_4) + (c_1+c_4))x^2$
   {*sifat asosiatif bil. riil*}

   $= ((2b_1+ b_2)+ (2b_2 - 3b_3)x+ (b_1+ b_4) x^2) + ((2c_1+c_2) + (2c_2 -3c_3)x + (c_1+c_4)x^2)$
   {*sifat penjumlahan polinom*}

   $=T(\mathbf{m}_1)+T(\mathbf{m}_2)$ {*definisi fungsi*}

2. Ambil $\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ anggota M_2 dan k skalar, maka $k\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} kb_1 & kb_2 \\ kb_3 & kb_4 \end{bmatrix}$, berarti

   $T(k\mathbf{m}_1) = T\left(\begin{bmatrix} kb_1 & kb_2 \\ kb_3 & kb_4 \end{bmatrix}\right) =$

   $= 2kb_1 + kb_2 + (2kb_2 – 3ka_3)x+ (kb_1 + ka_4)x^2$ {*definisi fungsi*}

   $= k(2b_1 + b_2 + (2b_2 – 3a_3)x+ (b_1 + a_4)x^2)$ {*sifat distributif bil. riil*}

   $=kT(\mathbf{m}_1)$ {*definisi fungsi*}

Jadi, fungsi yang didefinisikan di atas termasuk transformasi linier.

Contoh:
Didefinisikan fungsi T: $P_2 \rightarrow R^3$ dengan rumus:

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=\begin{bmatrix} a+b+c \\ a-b-c \\ b+c \end{bmatrix}$$

Apakah fungsi T yang didefinisikan di atas termasuk transfomasi linier?

Jawab:

1. Ambil $\mathbf{p}$=p(x)=$a_1+b_1x+c_1x^2$ dan $\mathbf{q}$=q(x)=$a_2+b_2x+c_2x^2$, maka $\mathbf{p}+\mathbf{q}$=p(x)+q(x)= $(a_1+ a_2)+(b_1+b_2)x +(c_1+c_2)x^2$, berarti

$$\mathrm{T}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2) \\ (a_1+a_2)-(b_1+b_2)-(c_1+c_2) \\ (b_1+b_2)+(c_1+c_2) \end{bmatrix} \qquad \{\textit{definisi fungsi}\}$$

$$=\begin{bmatrix} \left(a_1+b_1+c_1\right)+\left(a_2+b_2+c_2\right) \\ \left(a_1-b_1-c_1\right)+\left(a_2-b_2-c_2\right) \\ \left(b_1+c_1\right)+\left(b_2+c_2\right) \end{bmatrix} \qquad \{\textit{sifat asosiatif bil. riil}\}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1+b_1+c_1 \\ a_1-b_1-c_1 \\ b_1+c_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2+b_2+c_2 \\ a_2-b_2-c_2 \\ b_2+c_2 \end{bmatrix} \qquad \{\textit{sifat penjumlahan vektor}\}$$

$$=\mathrm{T}(\mathbf{p}) + \mathrm{T}(\mathbf{q}) \qquad \{\textit{definisi fungsi}\}$$

2. Ambil $\mathbf{p}$=p(x)=$a_1+b_1x+c_1x^2$ dan $k$skalar, maka $k\mathbf{p} = ka_1+ kb_1x+ kc_1x^2$

$$\mathrm{T}(k\mathbf{p})=\begin{bmatrix} ka_1+kb_1+kc_1 \\ ka_1-kb_1-kc_1 \\ kb_1+kc_1 \end{bmatrix} \qquad \{\textit{definisi fungsi}\}$$

$$=\begin{bmatrix} k\left(a_1+b_1+c_1\right) \\ k\left(a_1-b_1-c_1\right) \\ k\left(b_1+c_1\right) \end{bmatrix} \qquad \{\textit{sifat distributif bil. riil}\}$$

$$=k\begin{bmatrix} a_1+b_1+c_1 \\ a_1-b_1-c_1 \\ b_1+c_1 \end{bmatrix} \qquad \{\textit{sifat perkalian skalar dengan vektor}\}$$

$$=k\mathrm{T}(\mathbf{p}) \qquad \{\textit{definisi fungsi}\}$$

Jadi, fungsi yang didefinisikan di atas termasuk transformasi linier.

Contoh:
Fungsi yang memetakan setiap vektor di V ke vektor nol, disebut fungsi nol, yang secara lambang ditulis: T($\mathbf{v}$) = $\mathbf{0}$, $\forall\mathbf{v}\in$ V. Apakah fungsi nol termasuk transformasi linier?

Jawab:

1. Ambil **u**, **v**∈ V, maka
   T(**u**+**v**) = **0** {*definisi fungsi*}
   T(**u**+**v**) = **0**+**0** {*sifat vektor nol*}
   T(**u**+**v**) = T(**u**)+T(**v**) {*definisi fungsi*}
2. Ambil **v**∈ V, maka
   T(k**v**) = **0** {*definisi fungsi*}
   T(k**v**)=k.**0** {*sifat perkalian vektor nol dengan skalar*}
   T(k**v**)=kT(**v**) {*definisi fungsi*}

Jadi, fungsi nol merupakan transformasi linier.

Contoh:
Fungsi yang memetakan setiap vektor di V ke dirinya sendiri, disebut **fungsi identitas**, yang secara lambang ditulis: T(**v**) = **v**, ∀**v**∈ V. Apakah fungsi identitas termasuk transformasi linier?

Jawab:
1. Ambil **u**, **v** ∈ V, maka T(**u** + **v**)= **u** + **v** = T(**u**) + T(**v**)
2. Ambil **v**∈ V, dan k skalar, maka T(k**v**) = k**v** = kT(**v**)

Jadi, fungsi identitas termasuk transformasi linier.

Contoh:
Fungsi dari R^n ke R, dengan rumus:
$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$, untuk suatu matrik tetap A_{nxn} yang simetri disebut fungsi kuadrat. Apakah fungsi kuadrat termasuk transformasi linier?

Jawab:
Contoh penyangkal:
$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}$, sehingga:

$T(\mathbf{x})= \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = -3.$

k=5, berarti $5\mathbf{x}=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$, maka

$T(5\mathbf{x})= \begin{bmatrix}0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix} = -75 \neq -15 = -3T(\mathbf{x}).$

Jadi, fungsi T di atas bukan transformasi linier.

Transformasi linier dari ruang vektor ke ruang vektor yang **sama** disebut **operator linier**, T: V → V.

Sifat-sifat Transformasi Linier
Jika T transformasi linier dari ruang vektor V ke ruang vektor W, maka dipenuhi sifat-sifat berikut:

a. $T(\mathbf{o}_V) = \mathbf{o}_W$
b. T(-**u**) = -T(**u**), untuk setiap **u** ∈ V

c. T(**u** - **v**) = T(**u**) - T(**v**), untuk setiap **u**, **v**$\in$ V

Bukti:
Vektor **o** = 0.**u**, sehingga T(**o**) = T(0.**u**) dengan aksioma transformasi linier, maka skalar nol dapat dikeluarkan, yang berakibat: T(0.**u**)=0.T(**u**)=**o**.
Jadi, T($\mathbf{o}_V$) = $\mathbf{o}_W$, dimana $\mathbf{o}_V$ artinya vektor nol di ruang vektor V dan $\mathbf{o}_W$ adalah vektor nol di ruang vektor W.

Vektor minus, merupakan perkalian antara vektor dengan skalar minus satu atau –**u** = (-1).**u**, sehingga T(-**u**) = T(-1.**u**) = (-1)T(**u**) = -T(**u**).

Akibatnya, jelas T(**u** - **v**) = T(**u**) - T(**v**).

Contoh Khas:
Transformasi linier dari R^2 ke R^2 yang memutar suatu titik (a, b) sebesar sudut θ dengan titik putaran (0, 0), dinyatakan oleh rumusan berikut:

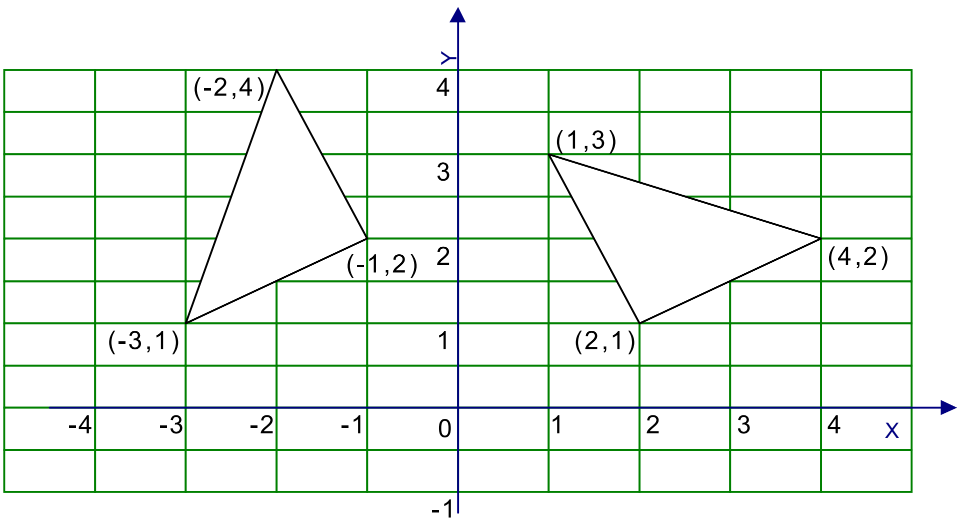
$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Segitiga dengan titik sudut (2, 1), (4, 2), dan (1, 3) jika diputar dengan sudut π/ 2, maka akan terbentuk segitiga kembali dengan titik sudut:

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Selain diputar seperti pada contoh di atas, pada citra, kadangkala diperbesar, peregangan (*stretch*) searah sumbu x ataupun searah sumbu y, pemampatan (*compressed*), dicerminkan, atau kombinasi dari beberapa transformasi tersebut.

Dengan matrik transformasi, sebagai berikut:

Efek	Matrik transformasi
Pencerminan terhadap sumbu y	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Pencerminan terhadap sumbu x	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Pencerminan terhadap garis y=x	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Pembesaran	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, dengan $k > 1$
Pengecilan	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, dengan $0 < k < 1$
Peregangan/ pemampatan searah sumbu x	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Peregangan/ pemampatan searah sumbu y	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

Latihan:

1. Tentukan nilai fungsi dari vektor yang diberikan:
   a. $T(a + bx + cx^2) = a + b + c$, jika $\mathbf{p}=2 + 3x^2$.
   b. $T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a+b & a-b \\ 2a-3b & b-a \end{bmatrix}$, jika $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$.
   c. $T(a + bx + cx^2)=\begin{bmatrix} a+b+c \\ a-b-c \\ b+c \end{bmatrix}$, jika $\mathbf{p}=3x + 5x^2$.
   d. $T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} a+b+3c \\ a-d \\ 2a+b+c \end{bmatrix}$, jika $\mathbf{m}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$.
   e. $T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, jika $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.
2. Sebagaimana permasalahan yang dibahas pada matakuliah kalkulus, sebuah fungsi pastilah diperhatikan dari sisi himpunan daerah asal dan daerah nilai. Tentukan daerah nilai dari transformasi linier yang diberikan pada soal no. 1 diatas.
3. Tentukan prapeta, jika ada, dari nilai fungsi yang diberikan:
   a. $T(a + bx + cx^2) = a + b + c$, jika $T(\mathbf{p})=3$.
   b. $T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a+b & a-b \\ 2a-3b & b-a \end{bmatrix}$, jika $T(\mathbf{v})=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

c. $T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a+b+c \\ a-b-c \\ b+c \end{bmatrix}$, jika $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

d. $T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a+b+3c \\ a-d \\ 2a+b+c \end{bmatrix}$, jika $T(\mathbf{m}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

e. $T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, jika $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

4. Tunjukkan apakah fungsi-fungsi di bawah ini merupakan transformasi linier? Berikan contoh penyangkal, jika bukan transformasi linier.

a. $T(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a+b \\ a-2b \\ a+b+3c \end{bmatrix}$

b. $T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} ab \\ b^2 \end{bmatrix}$

c. $T(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a+b+3 \\ b+c-2 \end{bmatrix}$

d. $T(a + bx + cx^2) = b + cx + ax^2$

e. $T(a + bx + cx^2) = (a + b) + (a + 2c)x + (a - 2b)x^2 + (2b + c)x^3$

f. $T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = a + d$

g. $T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = ad - bc$

h. Jika W dibangun oleh $\{\mathbf{u}_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), \mathbf{u}_2 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)\}$, T adalah proyeksi ortogonal $\mathbf{u} \in R^2$ pada sub ruang W.

i. $T(a + bx + cx^2) = (a + 1) + (b + 1)x + (c + 1)x^2$

j. $T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{bmatrix}$

5. Jika $T: R^3 \rightarrow R^2$ transformasi linier dan diketahui peta dari basis baku R^3, sebagai berikut:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

a. Dengan cara menentukan skalar-skalar kombinasi linier $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ dan juga dengan menggunakan aksioma yang harus dipenuhi oleh transformasi linier, tentukan $T(\mathbf{u})$.

b. Tentukan matrik transformasi dari transformasi linier T.

c. Tentukan $T(\mathbf{v})$, jika $\mathbf{v} = (2, -3, 1)$.

6. Jika T: $R^3 \rightarrow W$ adalah proyeksi ortogonal dari R^3 ke sub ruang, yaitu bidang yz.
   a. Tentukan rumus untuk T.
   b. Tentukan peta dari T(3, -2, 5).
   c. Tentukan prapeta dari (0, 4, 2).
7. Dengan menggunakan matrik transformasi pada contoh khas, kerjakan soal-soal di bawah ini:
   a. Tentukan peta dari garis 2y – x = 1, jika diputar sebesar $\theta = \pi/4$.
   b. Tentukan peta dari garis 2y – x = 1, jika dicerminkan terhadap sumbu x.
   c. Tentukan peta dari garis 2y – x = 1, jika dicerminkan terhadap sumbu y.
   d. Tentukan peta dari garis 2y – x = 1, jika dicerminkan terhadap garis y = x.
   e. Tentukan peta dari segi empat dengan titik sudut (0,0), (2, 1), (2, 0), (0, 1), jika diperbesar dengan faktor $k = 4$.
   f. Tentukan peta jika hasil dari soal 7.e diregangkan searah sumbu x dengan faktor $k = 3$.
8. Banyak aplikasi dari transformasi linier T: $R^n \rightarrow R^n$ pada bidang teknik dan ekonomi yang mempunyai bentuk khusus, yaitu $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, dengan λ berupa bilangan riil, sedangkan vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, dan A matrik bujursangkar yang tetap.
   Tentukan nilai λ, jika $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$.
9. Tunjukkan bahwa jika T: $V \rightarrow W$ tranformasi linier, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ basis V, dan peta-peta vektor basis: $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) = \ldots = T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{o}$. Tunjukkan bahwa transformasi linier ini adalah transformasi nol.
10. Misalkan B matrik berordo 3x2 yang tetap. Tunjukkan bahwa fungsi T: $M_{22} \rightarrow M_{32}$ yang didefinisikan sebagai T(A) = BA adalah transformasi linier.

B. Kernel dan Jangkauan

Definisi:
Misalkan V dan W ruang vektor, misalkan T: V → W transformasi linier.
Kernel transformasi linier T atau Inti T adalah himpunan semua anggota V yang dipetakan ke vektor nol atau ditulis: Ker(T) = {**x**∈ V| T(**x**)=**o**}.
Jangkauan transformasi linier T atau Range T adalah himpunan semua anggota W dengan syarat ada anggota V sehingga anggota V tersebut adalah prapeta dari anggota W yang bersesuaian, atau ditulis:
R(T) = {**y**∈ W | ∃**x**∈ V, sehingga **y**=T(**x**)}.

Untuk memahamkan definisi dan teorema di atas, berikut diberikan beberapa contoh transformasi linier dengan berbagai domain dan kodomain dari ruang vektor yang berbeda.

Contoh:
Jika T transformasi identitas, tentukan Ker(T) dan R(T).

Jawab:
Karena setiap anggota V dipetakan ke anggota V itu sendiri, maka Ker(T) = {**o**}.
Sedangkan dikarenakan peta dari setiap anggota V hanya mempunyai peta vektor nol, maka R(T)=V.

Contoh B.1:
Tentukan Ker(T) dan R(T) jika sebuah transformasi linier dirumuskan, sebagai berikut:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ -2x_1+x_2 \\ -x_1+2x_2 \end{bmatrix}$$

Jawab:
Untuk mencari Ker(T), berarti mencari vektor (x_1, x_2) yang petanya sama dengan nol, yaitu:
T(x_1, x_2) = (x_1+x_2, -2x_1+x_2, -x_1+2x_2) = (0, 0, 0),
berarti setara dengan mencari solusi sistem persamaan linier homogen, berikut:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \end{array}$$

dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, didapat solusi:
x_1 = 0, x_2 = 0, sehingga Ker(T) hanya berisi vektor nol saja atau Ker(T) = {(0, 0)}.
Untuk mencari R(T), berarti mencari vektor (y_1, y_2, y_3) sehingga memenuhi persamaan:
(y_1, y_2, y_3) = (x_1+x_2, -2x_1+x_2, -x_1+2x_2) atau terbentuklah sistem persamaan linier:

$$\begin{array}{ccccc} y_1 & = & x_1 & + & x_2 \\ y_2 & = & -2x_1 & + & x_2 \\ y_3 & = & -x_1 & + & 2x_2 \end{array}$$

atau terbentuklah persamaan matrik:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

atau sistem persamaan linier pun dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

yang dapat dibaca sebagai: vektor (y_1, y_2, y_3) menjadi anggota R(T), jika vektor (y_1, y_2, y_3) menjadi anggota dari ruang kolom matrik $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

Contoh:
Tentukan Ker(T) dan R(T) jika sebuah transformasi linier dirumuskan, sebagai berikut:
$T(a + bx + cx^2) = (2a + b - 2c) + (3a + 3/2\ b - 3c)x$

Jawab:
Untuk mencari Ker(T), berarti mencari vektor polinom $a + bx + cx^2$, yang mempunyai peta nol, atau $T(a + bx + cx^2) = (2a + b - 2c) + (3a + 3/2\ b - 3c)x = 0$, berarti mencari solusi sistem persamaan linier homogen:

$$2a + b - 2c = 0$$
$$3a + 3/2\ b - 3c = 0$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss didapat:

$a + ½\ b - c = 0$,

atau didapat persamaan

$a = -\ ½\ b + c$,

berarti anggota Ker(T) berbentuk:

$(-½\ b+c) + bx + cx^2 = b\ (-\ ½ + x) + c(1 + x^2)$,

berarti pula:

$\text{Ker}(T) = \{b\ (-\ ½ + x) + c(1 + x^2) |\ b, c \in R\}$,

ini berarti pula, dapat dibaca Ker(T) dibangun oleh vektor $\{-½+x,\ 1+x^2\}$.

Untuk mencari R(T), berarti mencari vektor polinom $e + fx$, sehingga dipenuhi hubungan:

$e + fx = T(a + bx + cx^2) = (2a + b - 2c) + (3a + 3/2\ b - 3c)x$

sehingga didapat sistem persamaan linier:

$e = 2a + b - 2c$
$f = 3a + 3/2\ b - 3c$

yang dapat ditulis dalam bentuk persamaan vektor:

$$\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

yang dapat dibaca sebagai:

anggota R(T) adalah semua vektor polinom berbentuk $e + fx$ dengan syarat vektor $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ anggota ruang kolom matrik $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3/2 & -3 \end{bmatrix}$ atau ditulis dalam notasi himpunan:

R(T) = $\{e + fx \mid \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ anggota ruang kolom matrik $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3/2 & -3 \end{bmatrix}\}$

Contoh:
Tentukan Ker(T) dan R(T) jika sebuah transformasi linier dirumuskan, sebagai berikut:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+2b-c+d \\ 2b-c \\ a+d \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jawab:
Untuk mencari Ker(T), berarti mencari vektor matrik berbentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ yang mempunyai peta nol, atau $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+2b-c+d \\ 2b-c \\ a+d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, berarti mencari solusi sistem persamaan linier homogen:

$$\begin{array}{ccccccccc} a & + & 2b & - & c & + & d & = & 0 \\ & & 2b & - & c & & & = & 0 \\ a & & & & & + & d & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

yang mempunyai solusi: $a = -d$, $b = ½\, c$, berarti: Ker(T) adalah himpunan dari semua matrik berbentuk

$$\begin{bmatrix} -d & ½c \\ c & d \end{bmatrix}$$

yang dapat ditulis dalam bentuk

Ker(T)=$\{c\begin{bmatrix} 0 & ½ \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathrm{R}\}$

berarti Ker(T) adalah semua kombinasi linier dari $\{\begin{bmatrix} 0 & ½ \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$.

Untuk mencari R(T) berarti mencari vektor di R^4, yaitu: $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$ yang memenuhi persamaan:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b-c+d \\ 2b-c \\ a+d \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga terbentuk sistem persamaan linier:

$$\begin{aligned} y_1 &= a + 2b - c + d \\ y_2 &= 2b - c \\ y_3 &= a + d \\ y_4 &= 0 \end{aligned}$$

Terlihat bahwa $y_4 = 0$, dan didapat persamaan vektor:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa $\mathbf{y}$ berada pada ruang kolom matrik $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Contoh:

Tentukan Ker(T) dan R(T) jika sebuah transformasi linier dirumuskan, sebagai berikut:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + (a - b + c)x + (a + c - d)x^2 + (b - d)x^3$$

Jawab:

Untuk mencari Ker(T), berarti mencari vektor matrik $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, yang mempunyai peta nol, atau $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + (a - b + c)x + (a + c - d)x^2 + (b - d)x^3 = 0$, berarti mencari solusi sistem persamaan linier homogen:

$$\begin{aligned} a \qquad\qquad &= 0 \\ a - b + c \qquad &= 0 \\ a \qquad + c - d &= 0 \\ b \qquad - d &= 0 \end{aligned}$$

yang solusinya adalah: $a = 0$, $b = d$, $c = d$, berarti

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d \\ d & d \end{bmatrix} = d\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

berarti Ker(T) adalah semua kombinasi linier dari vektor $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Untuk mencari R(T), berarti mencari vektor $\mathbf{y} = e + fx + gx^2 + hx^3$, yang memenuhi persamaan:

$\mathbf{y} = e + fx + gx^2 + hx^3 = T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + (a - b + c)x + (a + c - d)x^2 + (b - d)x^3$

$\mathbf{y} = e + fx + gx^2 + hx^3 = a(1 + x + x^2) + b(-x + x^3) + c(x + x^2) + d(-x^2 - x^3)$, berarti R(T)=$\{ a(1 + x + x^2) + b(-x + x^3) + c(x + x^2) + d(-x^2 - x^3) \mid a, b, c, d \in \mathrm{R}\}$.

Contoh:
Tentukan Ker(T) dan R(T) jika sebuah transformasi linier dirumuskan, sebagai berikut:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & 2x_1 - x_2 \\ 3x_2 & -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

Jawab:
Untuk mencari Ker(T), berarti mencari vektor R^2, yaitu: $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, yang mempunyai peta nol, atau $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & 2x_1 - x_2 \\ 3x_2 & -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

berarti mencari solusi sistem persamaan linier homogen:

$x_1 + x_2 = 0$
$2x_1 - x_2 = 0$
$3x_2 = 0$
$-x_1 + 2x_2 = 0$

solusi dari sistem persamaan linier homogen di atas adalah: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, sehingga Ker(T) = {(0, 0)}.

Untuk mencari R(T), berarti mencari $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ yang memenuhi:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k + l & 2k - l \\ 3l & -k + 2l \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + l\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, R(T) = $\left\{ k\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + l\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \mid k, l \in \mathrm{R}\right\}$

Contoh:
Jika T: V → W transformasi nol atau ditulis T(**u**) = **o**, untuk semua **u** ∈ V, maka Ker(T) adalah ruang V sendiri, sedangkan R(T) hanyalah berisi vektor **o** saja, atau R(T) = {**o**}.

Ker(T) merupakan ruang vektor, untuk melihat hal ini, perhatikan uraian berikut:
Ker(T) ⊆ V dan Ker(T) ≠∅, karena ada **o** ∈ Ker(T), yang memenuhi T(**o**) = **o**.

Misalkan **u**, **v** $\in$ Ker(T), dan misalkan pula *k*, *l* skalar, maka dipenuhi: T(**u**) = **o**, dan T(**v**) = **o**, sedangkan

$T(k\mathbf{u} + l\mathbf{v}) = kT(\mathbf{u}) + lT(\mathbf{v})$	{*karena* T *transformasi linier*}
$T(k\mathbf{u} + l\mathbf{v}) = k\mathbf{o} + l\mathbf{o}$	{*karena* **u** *dan* **v** *anggota* Ker(T)}
$T(k\mathbf{u} + l\mathbf{v}) = \mathbf{o}$	{*sifat vektor nol*}

Jadi, $k\mathbf{u} + l\mathbf{v} \in$ Ker(T).
Sehingga Ker(T) merupakan sub ruang dari V.

Sedangkan R(T) juga ruang vektor, karena R(T) $\subseteq$ W dan R(T) sub ruang vektor dari ruang vektor W.
Misalkan **u**, **v** $\in$ R(T) dan *k*, *l* skalar, maka ada $\mathbf{x}_1$ sehingga T($\mathbf{x}_1$) = **u**, dan ada $\mathbf{x}_2$ sehingga T($\mathbf{x}_2$) = **v**,

$k\mathbf{u} + l\mathbf{v} = kT(\mathbf{u}) + lT(\mathbf{v})$	{*karena* **u** *dan* **v** *anggota* R(T)}
$k\mathbf{u} + l\mathbf{v} = T(k\mathbf{u}) + T(l\mathbf{v})$	{*karena* T *transformasi linier*}
$k\mathbf{u} + l\mathbf{v} = T(k\mathbf{u} + l\mathbf{v})$	{*karena* T *transformasi linier*}

Jadi, $k\mathbf{u} + l\mathbf{v}$ anggota R(T).
Jadi, R(T) sub ruang dari W.

Jadi, jika T: V → W transformasi linier, maka Ker(T) merupakan sub ruang V dan R(T) merupakan sub ruang dari W.

Karena itu masalah yang banyak dibahas dalam kaitan dengan Ker(T) dan R(T) adalah basis dan dimensi dari kedua sub ruang ini.

Dimensi dari Ker(T) diberi nama **nulitas T**, sedangkan dimensi dari Jangkauan T disebut **rank T**.

Contoh:
Dari contoh B.1, maka didapat basis Ker(T) adalah: tidak ada, sehingga nulitasnya= 0.
Dan basis R(T) adalah: basis ruang kolom $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, dikarenakan vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tidak saling berkelipatan, maka basis R(T) adalah $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ sehingga rank(T) = 2.

Contoh:
Tentukan basis dan dimensi Ker(T) dan R(T) dari transformasi linier berikut:
$T(a + bx + cx^2) = (2a + b - 2c) + (3a + 3/2\, b - 3c)x$

Jawab:
Dari jawaban di atas no. ? telah didapat, bahwa:

$\text{Ker}(T) = \{b(-\tfrac{1}{2} + x) + c(1 + x^2) \mid b, c \in \mathrm{R}\}$, Sehingga basis Ker(T) = {-½+x, 1+x^2} dan nulitas(T) = 2.

Sedangkan

R(T) = {$e + fx$| $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ anggota ruang kolom matrik $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & \frac{3}{2} & -3 \end{bmatrix}$}, untuk mencari basis ruang kolom $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & \frac{3}{2} & -3 \end{bmatrix}$ digunakan cara yang telah dibahas pada bab ruang baris dan ruang kolom, sehingga didapat basis ruang kolom tersebut adalah: {$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$}. Jadi basis R(T) = {2 + 3x}, sehingga rank(T) = 1.

Contoh:

Tentukan basis dan dimensi Ker(T) dan R(T) transformasi linier, berikut:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+2b-c+d \\ 2b-c \\ a+d \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Dari jawaban soal di atas didapat:

Ker(T)={$c\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $c, d \in$ R}, berarti basis Ker(T) = {$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$}, sehingga nulitas(T) = 2.

Sedangkan R(T) adalah ruang kolom matrik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan metode seperti sebelumnya didapat, basis ruang kolom:

{$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$}, berarti rank(T) = 2.

Contoh:

Tentukan basis dan dimensi Ker(T) dan R(T) transformasi linier, berikut:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + (a - b + c)x + (a + c - d)x^2 + (b - d)x^3$$

Jawab:

Dari jawaban soal sebelumnya didapat Ker(T){$\mathbf{x} = d\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$| $d \in$ R}, sehingga basis Ker(T) = {$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$}, sehingga nulitas(T) = 1.

Sedangkan R(T)={ $a(1 + x + x^2)+ b\,(-x + x^3) + c(x + x^2) + d(-x^2 - x^3)|\ a, b, c, d \in$ R}, berarti mencari basis dari ruang yang dibangun oleh: {$\mathbf{p}_1$=$1 + x + x^2$, $\mathbf{p}_2 = -x + x^3$, $\mathbf{p}_3 = x + x^2$, $\mathbf{p}_4 = -x^2 - x^3$} dan persoalan ini setara dengan mencari himpunan bebas linier dari { $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$}.

Untuk itu akan dibuang vektor yang bergantung linier, karenanya bentuklah persamaan homogen:

$a\mathbf{p}_1 + b\mathbf{p}_2 + c\mathbf{p}_3 + d\mathbf{p}_4 = 0$

$a(1 + x + x^2)+ b\,(-x + x^3) + c(x + x^2) + d(-x^2 - x^3) = 0,$

atau

$a + (a - b + c)x + (a + c - d)x^2 + (b - d)x^3 = 0,$ (*)

sehingga didapat sistem persamaan linier homogen:

$$\begin{array}{llll} a & & & = 0 \\ a - b + c & & & = 0 \\ a & + c - d & & = 0 \\ \quad b & - d & & = 0 \end{array}$$

dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan didapat solusi:

$a = 0, b = d, c = d$

Sehingga dengan melakukan subtitusi ke persamaan (*) didapat:

$d\mathbf{p}_2 + d\mathbf{p}_3 + d\mathbf{p}_4 = d(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) = 0$, karena d **tidak harus nol**, maka dapat diambil $\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = 0$, akibatnya $\mathbf{p}_4 = -(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)$. Sehingga, vektor $\mathbf{p}_4$ bergantung linier pada dua vektor yang lain. Jadi, yang menjadi basis R(T) ={$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$} = { $\mathbf{p}_1$=$1 + x + x^2$, $\mathbf{p}_2 = -x + x^3$, $\mathbf{p}_3 = x + x^2$}, sehingga rank(T) = 3.

Contoh:

Tentukan basis dan dimensi Ker(T) dan R(T) transformasi linier, berikut:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & 2x_1 - x_2 \\ 3x_2 & -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Dari jawaban pada soal sebelumnya didapat: Ker(T) = {(0, 0)}, sehingga basisnya tidak ada dan nulitas(T) = 0.

Telah didapat pula R(T) = { $k\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + l\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$| $k, l \in$ R}, dan dikarenakan matrik $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ tidak saling berkelipatan, maka basis dari R(T) = {$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$}, sehingga rank(T)=2.

Contoh:
Jika T: V → W transformasi nol atau ditulis T(**u**) = **o**, untuk semua **u** ∈ V, maka Ker(T) adalah ruang V sendiri sehingga nulitas T sama dengan dimensi V. Dan R(T) hanyalah berisi vektor **o** saja, atau R(T) = {**o**}, berarti dimensi R(T) adalah nol.

Dari contoh-contoh di atas terlihat adanya hubungan antara dimensi(V), nulitas(T) dan rank(T). Pernyataan hubungan antara ketiganya dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema:
Misalkan V, W ruang vektor, dim(V) = n, T: V → W, maka berlaku hubungan:
n = nulitas(T) + rank(T).

Latihan:
1. Manakah vektor-vektor di bawah ini yang menjadi anggota R(T) untuk
   $T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{bmatrix}$?
   a. $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$
2. Manakah vektor-vektor di bawah ini yang menjadi anggota Ker(T) untuk
   $T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 \\ 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}$?
   a. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 5/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Manakah vektor-vektor di bawah ini yang menjadi anggota R(T) atau Ker(T) untuk $T(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2a-b+3c \\ a-b+c \\ a+2c \end{bmatrix}$?
   a. $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$
4. Manakah vektor-vektor di bawah ini yang menjadi anggota R(T) atau Ker(T) untuk $T(a+bx+cx^2) = (a+b+c)+ (-a+b-c)x + (2b)x^2$?
   a. $1 - x^2$
   b. $-2 + 2x$
   c. $2 + 2x^2$
   d. $2x + 2x^2$
   e. $3 + x + 4x^2$
   f. $–2 + 2x^2$
5. Manakah vektor-vektor di bawah ini yang menjadi anggota R(T) atau Ker(T) untuk $T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a-b & b-c \\ c-d & a-d \end{bmatrix}$?
   a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

f. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Manakah vektor-vektor di bawah ini yang menjadi anggota R(T) atau Ker(T) untuk

   $T(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = (2a+b) + (2a-c)x + (b+c)x^2$?

   a. $3 + x + 2x^2$

   b. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

   d. $2 + x + x^2$

   e. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

   f. $3 + 3x^2$

   g. $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

   h. $x + 3x^2$

7. Tentukan basis dan dimensi Ker(T) dan R(T) dari transformasi linier berikut:

   a. T(a+bx) = (a+b) + (a-b)x

   b. T(a+bx) = (a+2b, 2a - b)

   c. $T(a+bx+cx^2)=(a-b, b+c, a+c)$

   d. $T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a-3b \\ -a+3b \end{bmatrix}$

   e. $T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a-b+c \\ b-c+d \\ a+d \end{bmatrix}$

   f. $T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2a+b \\ a+2b \end{bmatrix}$

   g. $T(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} b+2c \\ a+2c \\ a-b \end{bmatrix}$

h. $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-b+c & b+2c \\ a+3c & -a+2b+c \end{bmatrix}$

i. $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 + 6x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 \end{bmatrix}$

j. $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & c \\ a & b \end{bmatrix}$

k. $T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a - b \\ 2b + 2c \\ a - 3b - 2c \end{bmatrix}$

8. Jika T: V → W tranformasi linier, lengkapilah tabel di bawah ini:

Dim(V)	Nulitas(T)	Rank(T)
4	2	…
7	…	5
3	…	0
4	4	…
…	2	4

C. Koordinat

Pada definisi yang akan digunakan, koordinat ditentukan oleh skalar-skalar kombinasi linier, karena itu perlu dilihat apakah kombinasi linier suatu vektor terhadap suatu basis ruang vektor, tunggal. Untuk melihat ini perhatikan uraian berikut:

Misalkan V ruang vektor dan suatu basis untuk V, misalkan B = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, misalkan pula $\mathbf{u} \in V$. Andaikan ada dua cara menyatakan kombinasi linier dari vektor **u** terhadap basis B, yaitu:

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n$$

dan

$$\mathbf{u} = l_1\mathbf{v}_1 + l_2\mathbf{v}_2 + \ldots + l_n\mathbf{v}_n$$

Berarti

$\mathbf{o} = \mathbf{u} - \mathbf{u} = (k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n) - (l_1\mathbf{v}_1 + l_2\mathbf{v}_2 + \ldots + l_n\mathbf{v}_n) = (k_1 - l_1)\mathbf{v}_1 + (k_2 - l_2)\mathbf{v}_2 + +\ldots + (k_n - l_n)\mathbf{v}_n$

Karena B bebas linier, maka persamaan vektor di atas hanya dipenuhi oleh:

$$k_1 - l_1 = k_2 - l_2 = \ldots = k_n - l_n = 0 \text{ atau}$$
$$k_1 = l_1,\ k_2 = l_2,\ \ldots,\ k_n = l_n$$

Jadi, kombinasi linier suatu vektor terhadap suatu basis tertentu selalu tunggal.

Definisi:

Misalkan V ruang vektor, B = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ basis V, $\mathbf{u} \in V$, kombinasi linier **u** terhadap basis B:

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n$$

Skalar-skalar pada kombinasi linier **u** terhadap basis B menjadi komponen dari koordinat **u** terhadap basis B sehingga dapat ditulis:

$$[\mathbf{u}]_B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

Dari definisi ini letak vektor anggota basis mempengaruhi letak komponen dalam koordinat. Dengan defnisi ini pula,.koordinat suatu vektor pada ruang vektor tidak tunggal dikarenakan basis dari suatu ruang vektor tidak tunggal.

Contoh:

Tentukan koordinat vektor **u**=(2, 3, -1) terhadap basis:

a. B = $\{\mathbf{v}_1=(1, 0, 0), \mathbf{v}_2=(0, 1, 0), \mathbf{v}_3=(0,0,1)\}$
b. C = $\{\mathbf{v}_1=(1, 1, 0), \mathbf{v}_2=(1, 0, 1), \mathbf{v}_3=(0,1,1)\}$.

Jawab:

a. Dengan menggunakan eliminasi Gauss atau perkalian dengan matrik invers, maka sistem persamaan linier:

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

mempunyai jawab: $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, dan $k_3 = -1$, sehingga koordinat **u** terhadap basis B adalah:

$$[\mathbf{u}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b. Dengan menggunakan eliminasi Gauss atau perkalian dengan matrik invers, maka sistem persamaan linier:

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

mempunyai jawab: $k_1 = 3$, $k_2 = -1$, dan $k_3 = 0$, sehingga koordinat **u** terhadap basis C adalah:

$$[\mathbf{u}]_C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Contoh:

Tentukan koodinat vektor $\mathbf{p} = 2 + 3x - x^2$ terhadap basis B = $\{\mathbf{q}_1 = 2 - x,\ \mathbf{q}_2 = 2x + 3x^2,\ \mathbf{q}_3 = 1 - x + x^2\}$.

Jawab:

Bentuklah persamaan vektor:

$$\mathbf{p} = k_1\mathbf{q}_1 + k_2\mathbf{q}_2 + k_3\mathbf{q}_3$$

Sehingga didapat sistem persamaan linier:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2 & = & 2k_1 & & & + & k_3 \\ 3 & = & -k_1 & + & 2k_2 & - & k_3 \\ -1 & = & & & 3k_2 & + & k_3 \end{array}$$

Dengan menggunakan metode yang sudah dikenal pada bab-bab sebelumnya, didapat solusi: $k_1=3$, $k_2=1$, dan $k_4=-4$, sehingga koordinat **p** terhadap basis B adalah:

$$[\mathbf{p}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Contoh:

Tentukan koordinat vektor $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ terhadap basis B = $\{ \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \vec{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \}$.

Jawab:

Bentuk persamaan vektor: $\mathbf{m} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} + k_4\vec{d}$, sehingga didapat sistem persamaan linier:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 1 & = & k_1 & & & + & k_3 & & \\ 0 & = & 2k_1 & - & k_2 & & & & \\ -1 & = & k_1 & + & k_2 & & & + & 2k_4 \\ 1 & = & & & k_2 & + & 2k_3 & + & 3k_4 \end{array}$$

Dengan menggunakan metode penyelesaian sistem persamaan linier, didapat solusi: $k_1=0$, $k_2=0$, $k_3=1$, $k_4=-1/3$, sehingga koordinat **m** terhadap basis B adalah:

$$[\mathbf{m}]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Contoh:
Misalkan S = { $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ } adalah basis ortonormal untuk ruang hasil kali dalam V, $\mathbf{u} \in$ V, dan didapat kombinasi linier dari **u** terhadap basis S adalah $\mathbf{u} = <\mathbf{u}, \mathbf{v}_1>\mathbf{v}_1 + <\mathbf{u}, \mathbf{v}_2>\mathbf{v}_2 + \ldots + <\mathbf{u}, \mathbf{v}_n>\mathbf{v}_n$, maka koordinat **u** terhadap basis S adalah:

$$[\mathbf{u}]_S = \begin{bmatrix} <\mathbf{u}, \mathbf{v}_1> \\ <\mathbf{u}, \mathbf{v}_2> \\ \vdots \\ <\mathbf{u}, \mathbf{v}_n> \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan konsep koordinat ini, maka ruang vektor yang bentuknya umum kembali ke bentuk vektor yang biasa, yaitu R^n.

Permasalahan yang seringkali muncul adalah dengan didefinisikannya koordinat sebagai sebuah vektor yang entri-entrinya adalah skalar-skalar pada kombinasi linier suatu vektor terhadap suatu basis, sedangkan basis itu tidak tunggal, maka apakah ada hubungan antara satu koordinat yang dihasilkan oleh basis B dengan basis lain, misalkan B'.

Misalkan dimensi(V) = n, basis V adalah B = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dan B' = $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$. Karena B basis V, maka B membangun V, karena itu setiap vektor di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari B, berarti pula setiap vektor anggota basis B' dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari B, misalkan kombinasi liniernya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= k_{11}\mathbf{v}_1 + k_{12}\mathbf{v}_2 + \ldots + k_{1n}\mathbf{v}_n \\ \mathbf{w}_2 &= k_{21}\mathbf{v}_1 + k_{22}\mathbf{v}_2 + \ldots + k_{2n}\mathbf{v}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_n &= k_{n1}\mathbf{v}_1 + k_{n2}\mathbf{v}_2 + \ldots + k_{nn}\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

Sehingga koordinatnya:

$$[\mathbf{w}_1]_B = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ \vdots \\ k_{1n} \end{bmatrix}, [\mathbf{w}_2]_B = \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{2n} \end{bmatrix}, \ldots, [\mathbf{w}_n]_B = \begin{bmatrix} k_{n1} \\ k_{n2} \\ \vdots \\ k_{nn} \end{bmatrix}$$

Karena B' basis V, maka untuk vektor $\mathbf{u} \in$ V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari B', misalkan kombinasi liniernya:

$$\mathbf{u} = l_1\mathbf{w}_1 + l_2\mathbf{w}_2 + \ldots + l_n\mathbf{v}_n$$

sehingga koordinatnya:

$$[\mathbf{u}]_{B'} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}.$$

Karena itu vektor **u** dapat diuraikan sebagai berikut:

$\mathbf{u} = l_1\mathbf{w}_1 + l_2\mathbf{w}_2 + \ldots + l_n\mathbf{v}_n$

$\mathbf{u} = l_1(k_{11}\mathbf{v}_1 + k_{12}\mathbf{v}_2 + \ldots + k_{1n}\mathbf{v}_n) + l_2(k_{21}\mathbf{v}_1 + k_{22}\mathbf{v}_2 + \ldots + k_{2n}\mathbf{v}_n) + \ldots +$
$\quad + l_n(k_{n1}\mathbf{v}_1 + k_{n2}\mathbf{v}_2 + \ldots + k_{nn})$

$\mathbf{u} = (l_1k_{11} + l_2k_{21} + \ldots + l_nk_{n1})\mathbf{v}_1 + (l_1k_{12} + l_2k_{22} + \ldots + l_nk_{n2})\mathbf{v}_2 + \ldots + (l_1k_{1n} + l_2k_{2n} + \ldots + l_nk_{nn})\mathbf{v}_n$

sehingga koordinat **u** terhadap basis B dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$[\mathbf{u}]_B = \begin{bmatrix} l_1k_{11} + l_2k_{21} + \cdots + l_nk_{n1} \\ l_1k_{12} + l_2k_{22} + \cdots + l_nk_{n2} \\ \vdots \\ l_1k_{1n} + l_2k_{2n} + \cdots + l_nk_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} = P[\mathbf{u}]_{B'}$$

dengan $P = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$, jika diperhatikan komponen kolom-kolom matrik P adalah koordinat vektor-vektor pada basis B' terhadap basis B, sehingga dapat dinyatakan:

$$P = \left[[\mathbf{w}_1]_B \;\vdots\; [\mathbf{w}_2]_B \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; [\mathbf{w}_n]_B \right]$$

Matrik P disebut matrik transisi dari basis B' ke basis B, nama ini disesuaikan dengan komponen pada kolom matrik P yang berasal dari koordinat vektor-vektor pada basis B' terhadap basis B.

Dengan demikian didapatkan hubungan antara koordinat terhadap basis B dan koordinat terhadap basis B', yaitu:

$$[\mathbf{u}]_B = P[\mathbf{u}]_{B'}$$

Contoh:

Tentukan matrik transisi dari basis B' ke basis B, jika:

$B = \{\mathbf{v}_1 = (4, 3), \mathbf{v}_2 = (1, 1)\}$ dan $B' = \{\mathbf{w}_1 = (3, 1), \mathbf{w}_2 = (2, 1)\}$

Jawab:

Koordinat $\mathbf{w}_1$ terhadap basis B adalah:

$\mathbf{w}_1 = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$

$(3, 1) = k_1 (4, 3) + k_2 (1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

sedangkan koordinat $\mathbf{w}_2$ terhadap basis B adalah:

$\mathbf{w}_2 = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$
$(2, 1) = k_1\,(4, 3) + k_2\,(1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Dari kedua persamaan matrik di atas, terlihat bahwa kedua persamaan ini hanya berbeda pada matrik koefisiennya saja, sehingga dapat menggunakan matrik lengkap yang diperbesar, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 - b_2 \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ b_2 - 3b_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Jadi, matrik transisi dari basis B' ke basis B adalah:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat matrik transisi:

a. Jika P matrik transisi dari basis B' ke basis B, maka P selalu mempunyai invers
b. P^{-1} adalah matrik transisi dari basis B ke basis B'

Dengan sifat ini didapatkan rumus baru, yaitu:

$$[\mathbf{u}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{u}]_B$$

Hasil yang meringankan untuk mengubah matrik transisi dari basis B' ke basis B menjadi matrik transisi dari basis B ke basis B' diperoleh jika B dan B' merupakan basis ortonormal pada ruang hasil kali dalam yang sama, yang dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema:
Jika P adalah matrik transisi dari satu basis ortonormal ke basis ortonormal yang lain pada sebuah ruang hasil kali dalam, maka $P^{-1} = P^T$

Latihan:

1. Tentukan koordinat vektor $\mathbf{u} = (2, -1)$ terhadap basis $B = \{\mathbf{v}_1 = (1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 0)\}$.
2. Tentukan koordinat vektor $\mathbf{u} = (-3, 4)$ terhadap $B = \{\mathbf{v}_1 = (-2, 3), \mathbf{v}_2 = (1, -1)\}$.
3. Tentukan koordinat vektor $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ terhadap basis $B = \{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)\}$.
4. Tentukan koordinat dari vektor $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ terhadap basis $B = \{ \mathbf{v}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)\}$
5. Tentukan koordinat dari vektor $\mathbf{p} = 6 + 6x$ terhadap basis $B = \{\mathbf{q}_1 = 2, \mathbf{q}_2 = 1 + 3x\}$
6. Tentukan koordinat dari vektor $\mathbf{p} = 2 + 3x + x^2$ terhadap basis $B = \{\mathbf{q}_1 = 2 + x, \mathbf{q}_2 = 1 + 3x - x^2, \mathbf{q}_3 = -2 + 2x - x^2\}$
7. Tentukan koordinat dari vektor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ terhadap basis $B = \{\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{m}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{m}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\}$.
8. Jika $[\mathbf{u}]_B = (1, -3)$, dengan basis $B = \{ \mathbf{v}_1 = (-2, 3), \mathbf{v}_2 = (1, -1)\}$, tentukan vektor $\mathbf{u}$.
9. Jika $[\mathbf{u}]_B = (1, -3, 2)$, dengan basis $B = \{ \mathbf{v}_1 = (-2, 0, 3), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 1),$

$\mathbf{v}_3$ = (1, -1, 3)}, tentukan vektor **u**.

10. Jika $[\mathbf{u}]_B$ = (1, -3, 2), dengan basis B = {$\mathbf{q}_1=2+x+x^2$, $\mathbf{q}_2=1+3x-x^2$, $\mathbf{q}_3 = -2+2x-x^2$}, tentukan vektor **u**.
11. Jika $[\mathbf{u}]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, dan matrik transisi dari B' ke B adalah: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan $[\mathbf{u}]_B$.
12. Jika $[\mathbf{u}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, dan matrik transisi dari B' ke B adalah: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$, tentukan $[\mathbf{u}]_{B'}$.
13. Tentukan matrik transisi dari basis B' ke basis B, jika:
    a. B = { $\mathbf{v}_1$ = (1, 1), $\mathbf{v}_2$ = (1, 0)}, dan B' = {$\mathbf{u}_1$ = (1, 0), $\mathbf{u}_2$ = (0, 1)}.
    b. B = { $\mathbf{v}_1$ = (1, 1), $\mathbf{v}_2$ = (1, 2)}, dan B' = {$\mathbf{u}_1$ = (3, 2), $\mathbf{u}_2$ = (2, 1)}.
14. Tentukan matrik transisi dari basis B' ke basis B, jika
    a. B= $\mathbf{v}_1$=(1, 0, 0), $\mathbf{v}_2$ = (0, 1, 0), $\mathbf{v}_3$ = (1, 1, 1)}, dan B' = {$\mathbf{u}_1$=(1,2,3), $\mathbf{u}_2$=(0,1,2)}, $\mathbf{u}_3$ = (2, -1, -3)}.
    b. B={$\mathbf{v}_1$=(-1,1,1), $\mathbf{v}_2$=(1,1,0), $\mathbf{v}_3$=(2,5,1)}, dan B' = {$\mathbf{u}_1$ = (1, 2, -1), $\mathbf{u}_2$ = (1, 3, 1)}, $\mathbf{u}_3$ = (-1, 3, 12)}.
15. Tentukan matrik transisi dari basis B' ke basis B, jika basis B = { $\mathbf{q}_1 = 2 + x$, $\mathbf{q}_2=1+3x - x^2$, $\mathbf{q}_3 = -2 + 2x - x^2$}, dan basis B' = {$\mathbf{p}_1 = 1 + 2x - x^2$, $\mathbf{p}_2 = 1 + 3x + x^2$, $\mathbf{p}_3 = -1 + 3x + 12x^2$}.
16. Tentukan matrik transisi dari basis B' ke basis B, jika basis B = {$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{m}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{m}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$}, dan basis B' = {$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$}.
17. Jika matrik transisi dari basis B' ke basis B adalah $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, dan basis B'={$\mathbf{u}_1$=(3,2), $\mathbf{u}_2$ = (2, 1)}, tentukan basis B.
18. Jika matrik transisi dari basis B' ke basis B adalah $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dan basis B = {$\mathbf{u}_1$ = (-1, -2), $\mathbf{u}_2$ = (2, 3)}, tentukan basis B'.
19. Jika matrik transisi dari basis B' ke basis B adalah $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, dan basis B'={$\mathbf{v}_1$= (1, 0, 0), $\mathbf{v}_2$ = (0, 1, 0), $\mathbf{v}_3$ = (1, 1, 1)}, tentukan basis B.

20. Jika matrik transisi dari basis B' ke basis B adalah $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, dan basis

    B={$\mathbf{p}_1 = 1 - x^2$, $\mathbf{p}_2 = x + x^2$, $\mathbf{p}_3 = 1 + 2x + 2x^2$}, tentukan basis B'.

21. Jika matrik transisi dari basis B ke basis B' adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 17 \end{bmatrix}$, dan basis

    B' = { $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$}, tentukan basis B.

22. Tentukan matrik transisi dari basis B ke basis B', jika matrik transisi dari basis B' ke basis B adalah $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

D. Matriks Transformasi Linier

Jika T: $V \rightarrow W$ transformasi linier dan $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ basis dari V dan peta dari setiap vektor pada basis tersebut ada, misalkan peta dari setiap vektor pada basis B adalah $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)$, maka peta dari semua vektor di V dapat ditentukan.

Untuk lebih jelasnya perhatikan uraian berikut:
Karena B basis di V, maka setiap vektor di V selalu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari B, misalkan untuk $\vec{u} \in V$ mempunyai kombinasi linier terhadap basis B sebagai berikut:

$$\vec{u} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_n\vec{v}_n$$

Sehingga peta dari $\vec{u}$ dapat ditulis:

$$\begin{aligned} T(\vec{u}) &= T(k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_n\vec{v}_n) \\ &= T(k_1\vec{v}_1) + T(k_2\vec{v}_2) + \ldots + T(k_n\vec{v}_n) \quad \textit{(aksioma 1 transformasi linier)} \\ &= k_1T(\vec{v}_1) + k_2T(\vec{v}_2) + \ldots + k_nT(\vec{v}_n) \quad \textit{(aksioma 2 transformasi linier)} \end{aligned}$$

Karena $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)$ telah diketahui, maka untuk setiap $\vec{u} \in V$ maka $T(\vec{u})$ dapat dihitung.

Contoh 1 *Misalkan basis P_1 adalah $B = \{\vec{p}_1 = 1, \vec{p}_2 = 1 + x\}$, sedangkan peta dari vektor basis B adalah:*

$$T(\vec{p}_1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad T(\vec{p}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. $T(3 - 2x)$

b. $T(a_0 + a_1x)$

Jawab:

a. Kombinasi linier $3 - 2x$ *terhadap basis B adalah:*

$$3 - 2x = k_1\vec{p}_1 + k_2\vec{p}_2 = k_1 + k_2(1 + x)$$

yaitu dipenuhi oleh: $k_1 = 5$, *dan* $k_2 = -2$, *sehingga peta* $3 - 2x$ *adalah:*

$$T(3 - 2x) = 5T(\vec{p}_1) - 2T(\vec{p}_2) = 5\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$$

b. Kombinasi linier $a_0 + a_1x$ terhadap basis B dipenuhi oleh: $k_1 = a_0 - a_1$ dan $k_2 = a_1$, sehingga peta $a_0 + a_1x$ adalah:

$$T(a_0 + a_1x) = \begin{bmatrix} 2a_0 - 2a_1 & -a_0 + 2a_1 \\ a_0 - 2a_1 & 2a_0 - 2a_1 \end{bmatrix}$$

Hasil lain yang dapat diperoleh dari transformasi linier adalah bahwa jika transformasi linier dari R^n ke R^m dinyatakan oleh T:$R^n \rightarrow R^m$ atau dapat ditulis:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sehingga didapat bahwa transformasi linier dari R^n ke R^m adalah transformasi matrik dengan matrik transformasinya:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Jika S= $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \cdots, \hat{e}_n\}$ basis baku dari R^n, maka didapat peta dari setiap vektor di basis baku sebagai berikut:

$$T(\hat{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$T(\hat{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$T(\hat{e}_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Jadi, matrik transformasi dari R^n ke R^m dapat dinyatakan, sebagai berikut:

$$\left[T(\hat{e}_1) \vdots T(\hat{e}_2) \vdots \ldots \vdots T(\hat{e}_n)\right]$$

karena S= $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \cdots, \hat{e}_n\}$ basis baku dari R^n, maka matrik di atas disebut **matrik baku**.

Contoh 2 *Tentukan matrik baku dari transformasi linier berikut:*

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

Jawab:
Basis baku di R^2 *adalah:* $\{\hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ *sehingga peta dari vektor basis baku adalah:*

$$T\left(\hat{e}_1\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad T\left(\hat{e}_2\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, matrik bakunya adalah:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cara lain mendapatkan matrik baku adalah mengubah rumus transformasi linier menjadi perkalian antara dua matrik, yaitu:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Matrik konstan suku pertama pada ruas kanan adalah matrik baku.

Dengan menggunakan konsep koordinat yang telah dibahas pada sub bab sebelumnya, maka kita dapat membuat setiap transformasi linier dari sebarang ruang vektor ke ruang vektor yang lain, kembali kepada bentuk transformasi matrik.

Jika T: $V \to W$ dengan dim(V) = n dan dim(W)= m serta $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ basis dari V dan $B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ basis dari W.
Karena

$$T\left(\vec{v}_1\right), T\left(\vec{v}_2\right), \ldots, T\left(\vec{v}_n\right)$$

berada di W, berarti masing-masing vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari B.
Misalkan:

$$T\left(\vec{v}_1\right) = k_{11}\vec{w}_1 + k_{12}\vec{w}_2 + \ldots + k_{1m}\vec{w}_m$$

Jika T: V $\to$ W dengan dim(V) = n dan dim(W)= m serta S=$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ basis dari V dan B=$\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ basis dari W.
Karena

$$T\left(\vec{v}_1\right), T\left(\vec{v}_2\right), \ldots, T\left(\vec{v}_n\right)$$

berada di W, berarti masing-masing vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari B.
Misalkan:

$$T\left(\vec{v}_1\right) = k_{11}\vec{w}_1 + k_{12}\vec{w}_2 + \ldots + k_{1m}\vec{w}_m$$

$$T(\vec{v}_2) = k_{21}\vec{w}_1 + k_{22}\vec{w}_2 + \ldots + k_{2m}\vec{w}_m$$
$$\vdots$$
$$T(\vec{v}_n) = k_{n1}\vec{w}_1 + k_{n2}\vec{w}_2 + \ldots + k_{nm}\vec{w}_m$$

Dengan demikian dapat dinyatakan dalam notasi koordinat terhadap basis B:

$$[T(\vec{v}_1)]_B = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ \vdots \\ k_{1m} \end{bmatrix}, [T(\vec{v}_2)]_B = \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{2m} \end{bmatrix}, \ldots, [T(\vec{v}_n)]_B = \begin{bmatrix} k_{n1} \\ k_{n2} \\ \vdots \\ k_{nm} \end{bmatrix}$$

Di lain pihak, misalkan $\vec{u} \in$ V, sehingga $\vec{u}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari S, misalkan:

$$\vec{u} = l_1\vec{v}_1 + l_2\vec{v}_2 + \ldots + l_n\vec{v}_n$$

Sehingga peta dari $\vec{u}$ dapat dituliskan:

$$\begin{array}{rcll} T(\vec{u}) & = & T(l_1\vec{v}_1 + l_2\vec{v}_2 + \ldots + l_n\vec{v}_n) & \\ & = & T(l_1\vec{v}_1) + T(l_2\vec{v}_2) + \ldots + T(l_n\vec{v}_n) & \textit{aksioma 1 transformasi linier} \\ & = & l_1T(\vec{v}_1) + l_2T(\vec{v}_2) + \ldots + l_nT(\vec{v}_n) & \textit{aksioma 2 transformasi linier} \\ & = & l_1(k_{11}\vec{w}_1 + k_{12}\vec{w}_2 + \ldots + k_{1m}\vec{w}_m) + & \\ & & +l_2(k_{21}\vec{w}_1 + k_{22}\vec{w}_2 + \ldots + k_{2m}\vec{w}_m) + \ldots + & \\ & & +l_n(k_{n1}\vec{w}_1 + k_{n2}\vec{w}_2 + \ldots + k_{nm}\vec{w}_m) & \textit{kombinasi linier peta terhadap B} \\ & = & (l_1k_{11} + l_2k_{21} + \ldots + l_nk_{n1})\vec{w}_1 + & \\ & & +(l_1k_{12} + l_2k_{22} + \ldots + l_nk_{n2})\vec{w}_2 + & \\ & & +(l_1k_{1m} + l_2k_{2m} + \ldots + l_nk_{nm})\vec{w}_m & \textit{sifat distributif vektor} \end{array}$$

Sehingga koordinat peta $\vec{u}$ terhadap basis B dapat dituliskan sebagai berikut:

$$[T(\vec{u})]_B = \begin{bmatrix} l_1k_{11} + l_2k_{21} + \ldots + l_nk_{n1} \\ l_1k_{12} + l_2k_{22} + \ldots + l_nk_{n2} \\ \vdots \\ l_1k_{1m} + l_2k_{2m} + \ldots + l_nk_{nm} \end{bmatrix}$$

Yang dapat ditulis sebagai perkalian matrik, berikut:

$$[T(\vec{u})]_B = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & \ldots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \ldots & k_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1m} & k_{2m} & \ldots & k_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

Yang dilambangkan oleh

$$[T(\vec{u})]_B = [T]_{S,B}[\vec{u}]_S$$

Perhatikan dengan seksama matrik: $[T]_{S,B}$ mempunyai vektor kolom yang merupakan **koordinat peta dari vektor-vektor pada basis S terhadap basis B** atau dapat ditulis menjadi:

$$[T]_{S,B} = \left[[T(\vec{v}_1)]_B \vdots [T(\vec{v}_2)]_B \vdots \ldots \vdots [T(\vec{v}_n)]_B \right]$$

Matrik ini diberi nama **matrik penyajian T terhadap basis S dan B**.

Contoh 3 *Diberikan transformasi linier:*

$$T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right) = \begin{bmatrix} a_0 + 2a_1 - a_2 \\ -a_0 + 3a_1 - a_2 \\ a_0 + 4a_2 \\ a_1 + 2a_2 \end{bmatrix}$$

Tentukan matrik penyajian T terhadap basis B, yaitu basis baku di P_2 dan B', yaitu basis baku di R^4.

Jawab:
Peta dari vektor-vektor pada basis baku P_2 adalah:

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, T\left(x^2\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga koordinat-koordinatnya terhadap basis baku R^4 adalah:

$$[T(1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [T(x)]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \left[T\left(x^2\right)\right]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, matrik penyajian T terhadap basis B dan B' adalah:

$$[T]_{B,B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Contoh 4 *Diberikan transformasi linier:*

$$T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right) = \begin{bmatrix} -2a_0 + 4a_1 \\ -a_0 + 3a_1 - a_2 \\ a_0 + 4a_2 \\ 4a_2 \end{bmatrix}$$

Tentukan matrik penyajian T terhadap basis P_2, yaitu

$$B = \{\vec{p}_1 = 1, \vec{p}_2 = 1 + x, \vec{p}_3 = 1 + x + x^2\}$$

dan basis R^4, yaitu

$$B' = \{\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

Jawab:
Peta dari vektor-vektor pada basis B adalah:

$$T(\vec{p}_1) = T(1) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T(\vec{p}_2) = T(1 + x) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T(\vec{p}_3) = T\left(1 + x + x^2\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Koordinat peta dari vektor-vektor pada basis B terhadap basis B' adalah:

$$[T(\vec{p}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, [T(\vec{p}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, [T(\vec{p}_3)]_{B'} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$[T]_{B,B'} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Jika T operator linier, yaitu: transformasi linier dari satu ruang vektor ke ruang vektor yang sama, T: U $\rightarrow$ U, dan misalkan C=$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ basis U, maka matrik penyajian T terhadap basis C adalah:

$$[T]_C = \left[[T(\vec{u}_1)]_C \vdots [T(\vec{u}_2)]_C \vdots \ldots \vdots [T(\vec{u}_n)]_C\right]$$

Contoh 5 *Diberikan operator linier:*

$$T\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) = (2a_0 + a_1) + (2a_1 - 3a_2)x + (-2a_1 + a_2)x^2$$

Tentukan matrik penyajian T terhadap basis baku B untuk P_2.

Jawab:
Peta dari vektor-vektor pada basis baku B adalah:

$$T(1) = 2, \qquad T(x) = 1 + 2x - 2x^2, \qquad T\left(x^2\right) = -3x + x^2$$

Sehingga koordinat-koordinat terhadap basis B adalah:

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [T(x)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \left[T\left(x^2\right)\right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Permasalahan yang biasanya menyertai matrik penyajian adalah mencari matrik penyajian yang sederhana, yaitu matrik diagonal. Sebagai gambaran kesederhanaan matrik diagonal, perhatikan operasi perkalian dari matrik diagonal di bawah ini:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Dengan demikian operasi yang berkaitan dengan matrik penyajian menjadi mudah.

Dengan mengingat konsep yang telah dijelaskan sebelumnya pada nilai eigen dan vektor eigen, maka pencarian matrik penyajian yang berbentuk matrik diagonal, dapat dinyatakan sebagai berikut:

Diberikan operator linier T: V $\rightarrow$ V, misalkan B=$\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n\}$ basis baku V, sehingga matrik penyajian T terhadap basis baku B, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$[T]_B = \left[[T(\hat{e}_1)]_B \vdots [T(\hat{e}_2)]_B \vdots \ldots \vdots [T(\hat{e}_n)]_B\right]$$

Akan dicari basis lain dari V, misalkan B'=$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, sehingga didapat matrik penyajiannya diagonal atau $[T]_{B'}$ berupa matrik diagonal. Berdasarkan pengalaman pada konsep nilai eigen dan vektor eigen, maka diperoleh rumusan:

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$$

dimana entry matrik diagonal, $[T]_{B'}$, adalah nilai eigen dari $[T]_B$ dan P adalah matrik yang vektor-vektor kolomnya adalah vektor-vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen pada matrik diagonal dan juga berupa matrik transisi dari basis yang akan dicari B' ke basis lama, yaitu basis baku B.

Untuk melihat kesimpulan di atas perhatikan uraian di bawah ini:

$$[T]_{B'} = \left[[T(\vec{v}_1)]_{B'} \vdots [T(\vec{v}_2)]_{B'} \vdots \ldots \vdots [T(\vec{v}_n)]_{B'}\right] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat hubungan per kolom:

$$[T(\vec{v}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, [T(\vec{v}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, [T(\vec{v}_n)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Berarti pula, didapat:

$$T(\vec{v}_1) = \lambda_1\vec{v}_1, T(\vec{v}_2) = \lambda_2\vec{v}_2, \ldots, T(\vec{v}_n) = \lambda_n\vec{v}_n$$

Terlihat adanya hubungan vektor eigen dan nilai eigen. Dalam hal ini vektor eigen merupakan koordinat dari vektor-vektor anggota basis B' terhadap basis baku B, sehingga basis B' adalah himpunan dari vektor-vektor eigen matrik $[T]_B$ dinyatakan sebagai kombinasi linier terhadap basis baku.

Untuk melihat kesimpulan kedua bahwa P matrik transisi dari B' ke B, perhatikan uraian di bawah ini:

Koordinat peta $\forall\vec{x} \in V$ terhadap basis B dan B' dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut:

$$[T]_B [\vec{x}]_B = [T(\vec{x})]_B$$

dan

$$[T]_{B'} [\vec{x}]_{B'} = [T(\vec{x})]_{B'}$$

Untuk melihat hubungan dengan matrik transisi, ingat kembali, bahwa jika P matrik transisi dari basis B' ke basis B, sehingga P^{-1} adalah matrik transisi dari B ke B', maka diperoleh hubungan:

$$P[\vec{x}]_{B'} = [\vec{x}]_B$$

dan

$$P^{-1}[T(\vec{x})]_B = [T(\vec{x})]_{B'}$$

Dari keempat hubungan di atas, didapat rangkaian persamaan matrik berikut:

$$[T]_{B'} [\vec{x}]_{B'} = P^{-1}[T(\vec{x})]_B = P^{-1}[T]_B [\vec{x}]_B = P^{-1}[T]_B P [\vec{x}]_{B'}$$

Karena persamaan matrik di atas berlaku untuk $\forall\vec{x} \in V$, maka didapatlah hubungan:

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$$

Sehingga didapat kesimpulan bahwa vektor-vektor eigen yang membentuk kolom-kolom matrik P adalah koordinat vektor-vektor pada basis baru B' terhadap basis lama B, yaitu basis baku.

Jadi, langkah-langkah untuk mencari basis baru yang membuat matrik penyajian berbentuk diagonal adalah:

1. Bentuklah matrik penyajian terhadap basis baku
2. Tentukan nilai eigen dari matrik penyajian terhadap basis baku
3. Tentukan vektor eigen dari matrik penyajian terhadap basis baku
4. Matrik penyajian T terhadap basis baru adalah matrik diagonal yang entry-entry pada diagonal utama adalah nilai eigennya
5. Basis baru adalah himpunan vektor-vektor eigen yang dinyatakan sebagai kombinasi linier terhadap basis baku

Contoh 6 *Diberikan operator linier berikut:*

$$T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right) = (2a_0 + a_1) + (2a_1 - 3a_2)\,x + (-2a_1 + a_2)\,x^2$$

a. Tentukan matrik penyajian T yang berbentuk matrik diagonal

b. Tentukan basis P_2 yang mempunyai matrik penyajian berbentuk matrik diagonal, namakan B'.

c. Tentukan $[T(\vec{q})]_{B'}$ dengan menggunakan matrik penyajian yang diagonal, jika $\vec{q} = 2 - 3x + x^2$

d. Dengan menggunakan hasil pada c., tentukan $T(q)$

Jawab:

a. Dari jawab sebelumnya telah didapat, matrik penyajian T terhadap basis baku B, adalah:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga nilai-nilai eigennya adalah: $\{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4\}$.
Jadi,

$$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

b. Koordinat vektor-vektor pada basis B' terhadap basis baku adalah: $[\vec{v}_1]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, [\vec{v}_2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [\vec{v}_3]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$
Sehingga basis B' = $\{\vec{v}_1 = -1 + 3x + 3x^2, \vec{v}_2 = 1, \vec{v}_3 = -3 - 6x + 4x^2\}$

c. Koordinat $\vec{q}$ terhadap basis B' adalah:

$$[q]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 3 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$[T(q)]_{B'} = [T]_{B'}\,[\vec{q}]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 6 \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

d. $T(\vec{q}) = \frac{1}{5}\left(-1+3x+3x^2\right) + 6.1 + \frac{8}{5}\left(-3-6x+4x^2\right) = 1-9x+7x^2$

Latihan:

1. Diberikan transformasi linier T:$R^3 \rightarrow R^2$ dengan peta dari vektor-vektor pada basis R^3 diketahui sebagai berikut:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2-5 \\ 3 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   Tentukan:

   a. $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$

   b. $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$

2. Diberikan transformasi linier T:$P_1 \rightarrow R^3$ dengan peta dari vektor-vektor pada basis diketahui sebagai berikut:

$$T(1+x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, T(3x) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

   Tentukan:

   a. $T(2-4x)$

   b. $T(a_0 + a_1 x)$

3. Tentukan matrik baku dari transformasi linier berikut:

   a. $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{bmatrix}$

b. $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ -2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$

c. $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$

4. Diberikan transformasi linier T:$R^2 \to R^3$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

   Tentukan matrik penyajian T terhadap basis baku R^2, namakan B, dan basis baku R^3, namakan B'.

5. Diberikan transformasi linier T:$R^2 \to P_2$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = 3x_1 + (x_1 + x_2)\,x + (3x_1 - 2x_2)\,x^2$$

   Tentukan matrik penyajian T terhadap basis baku R^2, namakan B, dan basis baku P_2, namakan B'.

6. Diberikan transformasi linier T:$R^2 \to M_{22}$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 & 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

   Tentukan matrik penyajian T terhadap basis baku R^2, namakan B, dan basis baku M_{22}, namakan B'.

7. Diberikan operator linier T:$R^2 \to R^2$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

   Tentukan matrik penyajian T terhadap basis baku R^2, namakan B.

8. Diberikan operator linier T:$P_2 \to P_2$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_0)\,x + (a_0 + a_1 - a_2)\,x^2$$

   Tentukan matrik penyajian T terhadap basis P_2, yaitu

$$B = \{\vec{p}_1 = 1, \vec{p}_2 = 1 + x, \vec{p}_3 = 1 + x + x^2\}$$

9. Diberikan matrik penyajian T terhadap basis

$$B = \{\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\}$$

dan

$$B' = \{\vec{p}_1 = 1, \vec{p}_2 = 1 - x, \vec{p}_3 = 1 - x + x^2\}$$

$$[T]_{B,B'} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, dengan menggunakan rumus yang dibahas pada sub bab ini, tentukan:

(a) $[T(\vec{u})]_{B'}$

(b) $T(\vec{u})$

10. Diberikan matrik penyajian T: $P_2 \to R^3$ terhadap basis B dan B' sebagai berikut:

$$[T]_{B,B'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$B = \{\vec{p}_1 = 1 + x, \vec{p}_2 = x + x^2, \vec{p}_3 = 1 + 3x + 3x^2\}$

$$B' = \{\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\}$$

Tentukan:

a. koordinat-koordinat: $[T(\vec{p}_1)]_{B'}, [T(\vec{p}_2)]_{B'}, [T(\vec{p}_3)]_{B'}$

b. peta-peta: $T(\vec{p}_1), T(\vec{p}_2), T(\vec{p}_3)$

c. rumus umum transformasi linier $T(a_0 + a_1x + a_2x^2)$

d. peta dari: $T(-3 + 2x - x^2)$

11. Diberikan matrik penyajian T: $R^3 \to R^4$ terhadap basis B dan B' sebagai berikut:

$$[T]_{B,B'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \{\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

$$B' = \{\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

Tentukan:

(a) $[T(\vec{v}_1)]_{B'}, [T(\vec{v}_2)]_{B'}, [T(\vec{v}_3)]_{B'}$

(b) $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), T(\vec{v}_3)$

(c) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$

(d) $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$

12. Misalkan $T : M_{22} \rightarrow M_{22}$ diberikan oleh:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$$

a. Tentukan nilai-nilai eigen matrik penyajian T terhadap basis baku

b. Tentukan vektor-vektor eigen matrik penyajian T terhadap basis baku

c. Tentukan matrik penyajian T yang berbentuk matrik diagonal

d. Tentukan basis yang menyebabkan matrik penyajian T berbentuk matrik diagonal

13. Tentukan matrik penyajian yang sederhana dan juga basis yang membentuknya dari operator linier di bawah ini:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -x_2 + 3x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

14. Tentukan matrik penyajian yang sederhana dan juga basis yang membentuknya dari operator linier di bawah ini:

$$\begin{aligned} T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) &= (4a_0 + 2a_1 + 2a_2) + (2a_0 + 4a_1 + 2a_2)x + \\ &\quad + (2a_0 + 2a_1 + 4a_2)x^2 \end{aligned}$$

15. Tentukan matrik penyajian yang sederhana dan juga basis yang membentuknya dari operator linier di bawah ini:

$$T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{11}+a_{12} \\ 3a_{21}+2a_{22} & 2a_{21}+3a_{22} \end{bmatrix}$$

DAFTAR PUSTAKA

1. Anton, Howard, *Aljabar Linear Elementer*, terjemahan, Penerbit Erlangga, Jakarta, 1992
2. Farlow, Stanley J., *Finite Mathematics and Its Applications*, 2^{nd} edition, McGraw Hill, Singapore, 1994
3. Herstein, I.N., *Topics in Algebra*, John Wiley and Sons, 2^{nd} Edition, New York, 1975
4. Kreyszig, Erwin, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley and Sons, 7^{th} Edition, Canada, 1993
5. Marcus, Daniel A., *Combinatorics a Problem Oriented Approach*, The Mathematical Association of America, Washington DC, 1998
6. Roman, Steven, *Advanced Linear Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1992